

## 非圆孔径离散采样点正交多项式波前拟合

孙文卿, 陈磊, 李金鹏, 乌兰图雅, 何勇

(南京理工大学 电子科学与光电技术学院, 江苏 南京 210094)

**摘要:** Zernike 多项式拟合是一种在光学领域中广泛应用的分析技术。由于现代光学工程中采集数据的离散性和非圆孔径系统的大量使用, Zernike 多项式拟合不能完全满足分析需要。提出了一种基于 Zernike 多项式的非圆孔径离散采样点的正交多项式。通过矩阵的 QR 分解方法得到在离散采样点上的正交多项式基底。分别使用 Zernike 多项式和正交多项式对 150 mm×90 mm 的矩形光栅反射波前进行拟合, 结果表明两种方法残差波前的 PV 和 RMS 值分别相差 0.013 波长和小于 0.001 波长。对比不同项数拟合的正交多项式和 Zernike 多项式系数表明, 正交多项式系数之间彼此独立, 并由正交多项式系数计算得到了对应的 Seidel 像差。正交多项式各项系数可以逐项求解, 该方法可以显著提高求解速度。

**关键词:** 光学测量; Zernike 多项式; 正交多项式; 波前拟合; 非圆区域

**中图分类号:** TH744.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2276(2015)03-1068-05

## Discrete sampling points of non-circular aperture orthogonal polynomials wave-front fitting

Sun Wenqing, Chen Lei, Li Jinpeng, Wulan Tuyu, He Yong

(School of Electronic Engineering and Optoelectronic Techniques, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094, China)

**Abstract:** The Zernike polynomial is a widely used analytical technique in optics. Because of the discrete sampled measurement data and widely used non-circle aperture system in modern optical engineering, Zernike polynomial fitting can not satisfy a requirement completely. A kind of non-circle aperture discrete sampled orthogonal polynomial based on Zernike polynomial was proposed. The orthogonal basis was obtained using matrix QR decomposition method for discrete samples. Zernike polynomial and orthogonal polynomial were used for fitting 150 mm×90 mm rectangular grating wave-front. The differences of PV and RMS between two methods are 0.013 waves and less than 0.001 waves respectively for the residual wave-front. Comparison of different order fitting of the orthogonal polynomial and Zernike polynomial coefficients, indicate that the orthogonal polynomial coefficients are independent of each other. And the corresponding Seidel aberrations were calculated by the orthogonal polynomial coefficients. Orthogonal polynomial coefficients can be solved one by one. This method can significantly improve the solution speed.

**Key words:** optical measurement; Zernike polynomial; orthogonal polynomial; wave-front fitting; non-circle area

收稿日期: 2014-07-21; 修订日期: 2014-08-20

基金项目: 国家自然科学基金(61108041, U1231111)

作者简介: 孙文卿(1984-), 男, 博士生, 主要从事光学测试方面的研究。Email: yy20807@163.com

导师简介: 陈磊(1964-), 男, 博士生导师, 主要从事光电智能仪器方面的研究。Email: chenlei@njust.edu.cn

## 0 引言

在光学工程领域中,Zernike 多项式作为一组能在单位圆上正交的基底函数有着非常广泛的应用,如光学系统设计与分析<sup>[1-3]</sup>,人眼的像差特性与校正<sup>[4-5]</sup>,评价点衍射干涉系统等<sup>[6]</sup>。多年来,对 Zernike 多项式的研究不断深入,V.N.Mahajan 等在《光学车间检验(第三版)》中对 Zernike 多项式及其与光学像差的对应关系有详细叙述,涵盖了 Zernike 多项式的各个方面<sup>[7]</sup>;侯溪等分析了对于环形区域采用 Zernike 圆形和环形多项式拟合对赛得像差系数的影响<sup>[8]</sup>。

随着技术的不断进步,大量非圆形孔径的光学系统得到应用,如 Keck 望远镜的主镜就是采用六角形孔径。还有些光学系统中,平行光斜入射到圆形的平面镜上反射,出射的光斑就是椭圆形的<sup>[9]</sup>。R.Upton 等将 Gram-Schmidt 方法应用于连续分布的 Zernike 多项式得到六角形区域上正交多项式<sup>[10]</sup>。V.N.Mahajan 和 Guang-ming Dai 研究了儿种典型的非圆区域的正交多项式的连续解析表示及误差分析,包括椭圆、正方形、长方形、六角形和细缝等并用于分析大气湍流<sup>[11-14]</sup>。段海峰和李荫阳等分别对非圆区域的正交多项式波前重构进行了研究,用于哈特曼传感器波前分析<sup>[15-16]</sup>。Shi Zhenguang 等分析了发散状分布的离散点上的 Zernike 多项式重构<sup>[17]</sup>。

目前广泛使用的测量分析软件,如 Zygo 公司的 MetroPro、Veeco 公司的 Vision32 等,都只能计算 Zernike 系数,而不能提供在拟合区域上的正交系数。从 Zernike 多项式对非圆孔径数据拟合得到的系数计算 Seidel 像差的结果是不稳定的,例如在 MetroPro 中选取 37 项或 25 项多项式对某个非圆孔径的数据进行拟合计算得到 Seidel 像差结果不同,而使用正交系数得到的结果是不变的。文中首先介绍了区域正交多项式系数计算的一般原理。然后对一块在惯性约束核聚变(ICF)中使用的大口径矩形光栅的反射波前进行分析,该脉宽压缩光栅的尺寸为 150 mm×90 mm,反射波前在 600 mm 口径干涉仪上进行测量,分别计算了不同阶数下的 Zernike 多项式和正交多项式系数,对比了不同基底拟合结果的系数变化,给出了由正交多项式系数计算得到 Seidel 系数,最后将两种不同拟合方法的计算时间进行了

对比。

## 1 原理

Zernike 多项式在极坐标下可以写为:

$$Z_j(\rho, \theta) = \sqrt{2(n+1)} R_n^m(\rho) \cdot \begin{cases} \cos m\theta (j \text{ 为偶数}) \\ \sin m\theta (j \text{ 为奇数}) \end{cases}, m \neq 0$$

$$Z_j(\rho, \theta) = \sqrt{n+1} R_n^0(\rho), m=0 \quad (1)$$

式中:( $\rho, \theta$ )为单位圆内点的极坐标, $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ ;  $j$  为项数; $R_n^m(\rho)$  为径向多项式,可以写为:

$$R_n^m(\rho) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \left(\frac{n+m}{2} - s\right)! \left(\frac{n-m}{2} - s\right)!} \rho^{n-2s} \quad (2)$$

将极坐标( $\rho, \theta$ )转换转换为直角坐标( $x, y$ ),并在单位圆内取出的一区域  $A$ ,其波前表示为  $\tilde{W}(x, y)$ ,对于该非圆区域的波面拟合可以写为:

$$\tilde{W}(x, y) = \sum_j c_j F_j(x, y) \quad (3)$$

系数  $c_j$  可以写为:

$$c_j = \frac{1}{A} \iint_A \tilde{W}(x, y) F_j(x, y) dS \quad (4)$$

式中:基底  $\{F_j\}$  在该区域上是正交的。即有

$$\frac{1}{A} \iint_A F_j(x, y) F_l(x, y) dS = \delta_{jl} \quad (5)$$

对于离散点的情况,所有  $(x_i, y_i) \in A$  的  $N$  个采样点上对应的圆域 Zernike 多项式基底  $\{Z_j\}$  和区域正交基底  $\{F_j\}$  分别写作向量的形式为:

$$\tilde{Z}_j = [z_j(x_1, y_1) \quad z_j(x_2, y_2) \cdots z_j(x_N, y_N)]^T$$

$$\tilde{F}_j = [f_j(x_1, y_1) \quad f_j(x_2, y_2) \cdots f_j(x_N, y_N)]^T \quad (6)$$

式中: $z$  和  $f$  表示基底在该采样点处的取值。将公式(6)排列成矩阵的形式:

$$\tilde{Z} = [\tilde{Z}_1 \quad \tilde{Z}_2 \quad \tilde{Z}_j]$$

$$\tilde{F} = [\tilde{F}_1 \quad \tilde{F}_2 \quad \tilde{F}_j] \quad (7)$$

为了建立矩阵  $Z$  和  $F$  之间的关系,对  $Z$  进行 QR 分解:

$$\tilde{Z} = QR \quad (8)$$

式中: $Q$  为正交矩阵; $R$  为三角矩阵。矩阵理论可以证明, $\tilde{Z}$  的 QR 分解总是存在且唯一的。QR 分解的实现方法有 Gram-Schmidt 正交化、Householder 变换、

Givens 旋转等方法。根据公式(8)计算得到的  $Q$  就是所需要的非圆区域的正交多项式基底, 即  $F=Q$ 。由公式(3)、(7)、(8)可知:

$$\vec{Z} \cdot \vec{b} = QR \cdot \vec{b} = \vec{F} \cdot \vec{c} \quad (9)$$

式中:圆域 Zernike 系数  $\vec{b}=(b_1 \ b_2 \ \dots \ b_j)$ ;非圆区域正交多项式系数  $\vec{c}=(c_1 \ c_2 \ \dots \ c_j)$ 。由公式(9)可知:

$$R \cdot \vec{b} = \vec{c} \quad (10)$$

所以  $R$  就是系数之间的转换矩阵, $R$  为三角矩阵,可以求得  $R^{-1}$ 。对波前的拟合可以通过下式完成:

$$\vec{F} \cdot \vec{c} = \vec{D} \quad (11)$$

式中: $\vec{D}$ 即为测量波前数据并写成向量的形式。在波前拟合中,测量数据存在拟合误差,因此该方程组的解是其最小二乘解,对于线性方程组一般使用条件数来衡量其系数矩阵对误差扰动影响的敏感程度:

$$\text{cond}(F) = \|\vec{F}^{-1}\| \cdot \|\vec{F}\| \quad (12)$$

表示系数矩阵  $\vec{F}$  在  $\|\cdot\|$  范数下的条件数。当系数矩阵  $\vec{F}$  和  $\vec{D}$  产生扰动时,解向量的误差均与条件数  $\text{cond}(\vec{F})$  成正比, $\text{cond}(\vec{F})$  越大,扰动对解的影响越大。可以通过判断条件数的大小决定是否需要对基底进行改造。

## 2 大口径矩形光栅反射波前分析

对一块在 600 mm 口径 Fizeau 干涉仪上测量的矩形脉宽压缩光栅的反射波前进行了正交多项式拟合,光栅尺寸为 150 mm×90 mm,得到的数据分辨率为 662 pixel×386 pixel,测得的原始波前及干涉图如图 1 所示。

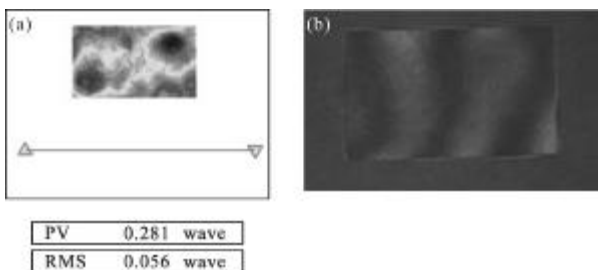
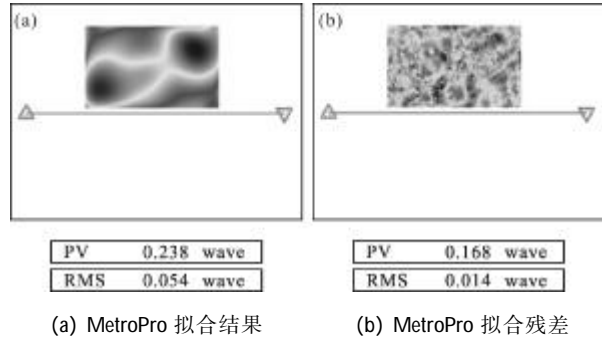


图 1 大口径矩形光栅反射波前及干涉图

Fig.1 Large diameter rectangular grating reflection wave-front and interferogram

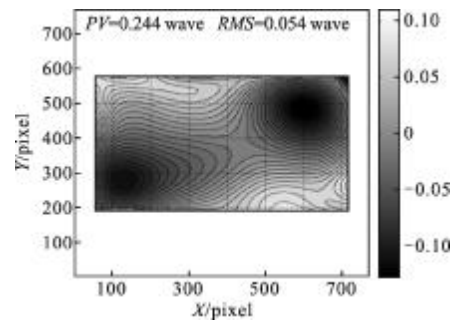
测量得到的反射波前使用 Zygo 自带的 MetroPro

8.1.5 干涉分析软件进行了 37 项 Zernike 多项式的拟合,结果如图 2 所示。正交多项式拟合结果和残差如图 3(a)和(b)所示。可以看出,两者拟合残差的 PV 相差 0.013 波长,RMS 相差小于 0.001 波长。



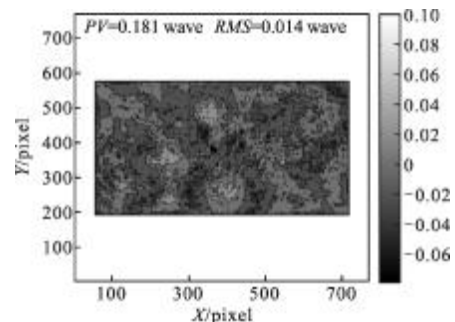
(a) Fitting result with MetroPro (b) Fitting residual with MetroPro

图 2 37 项 Zernike 多项式拟合结果  
Fig.2 37 terms Zernike polynomial fitting result



(a) 拟合波前

(a) Fitting wave-front



(b) 拟合残差

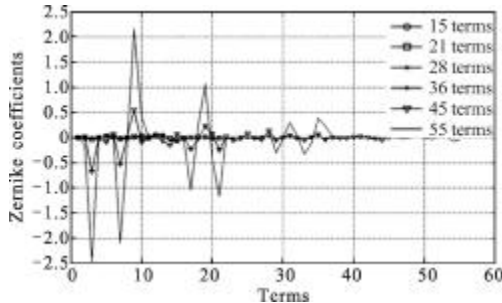
(b) Fitting residual

图 3 37 项正交多项式拟合结果

Fig.3 37 terms orthogonal polynomial fitting result

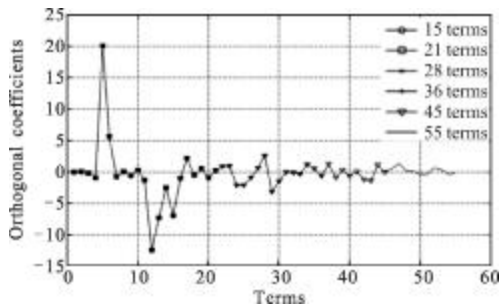
为了进一步对比 Zernike 多项式和正交多项式在非圆区域拟合中系数的差别,分别使用 15 项、21 项、28 项、36 项、45 项和 55 项这 6 种不同项数的多项式进行拟合,基底分别选择外接圆 Zernike 多项式和矩形正交多项式,得到的系数对比如图 4(a)、(b)

所示。从系数变化情况可以明显看出：在非圆孔径中,Zernike 多项式系数之间相互耦合, 而正交多项式系数之间相互独立。



(a) 不同阶数拟合的 Zernike 多项式系数

(a) Fitting Zernike polynomial coefficients for different orders



(b) 不同阶数拟合的正交多项式系数

(b) Fitting orthogonal polynomial coefficients for different orders

图 4 不同多项式拟合系数对比

Fig.4 Comparison of coefficients with different polynomials fitting

根据 Seidel 像差的定义以及上文计算出的正交多项式的前 9 项系数  $c_0 \sim c_8$ , 先进行归一化, 进而可以计算出各项 Seidel 像差的大小及其方向, 如表 1 所示, 其中  $c_0$  表示常数项。

表 1 Seidel 像差系数计算 (单位: 波长)

Tab.1 Computation of Seidel aberrations (Unit:wave)

Aberrations	Calculation formula and result
Piston	$W_{00}=c_0=-2.5104 \times 10^{-4}$
Tilt	$W_{11}=\sqrt{(c_1-2c_6)^2+(c_2-2c_7)^2}=0.0140$ $\theta_{11}=\arctan\left(\frac{c_1-2c_6}{c_2-2c_7}\right)=-11.3^\circ$
Defocus	$W_{20}=2c_3-6c_8 \pm \sqrt{c_4^2+c_5^2}=-0.1034$
Astigmatism	$W_{22}=\pm 2\sqrt{c_4^2+c_5^2}=-0.2398$ $\theta_{22}=0.5\arctan(c_5/c_4)=13.5^\circ$
Coma	$W_{31}=3\sqrt{c_6^2+c_7^2}=0.0205$ $\theta_{31}=\arctan(c_7/c_6)=-3.4^\circ$
Spherical aberration	$W_{40}=6c_8=-0.0227$

用正交多项式拟合波前除了不同阶数下求解系数稳定, 可以更容易地计算出 Seidel 系数之外, 还有其他优势之处。

对于测量分辨率较高、得到的数据量较大、需要求解的项数较多时, 计算时间显著增长。此时, 利用正交多项式系数相互独立的特点可以实现系数的快速求解。一般来说, 最小二乘法求解方程时的时间复杂性为:

$$T \propto pn^2 \tag{13}$$

式中:  $p$  表示方程的个数, 即区域内采样点的个数;  $n$  表示未知数的个数, 这里表示所要求解的系数的个数。计算时间  $T$  与  $n^2$  成正比, 这意味着当  $n$  较大后计算时间增长很快。而当系数之间相互独立时可以逐项求解, 从而时间复杂性变为:

$$T \propto pn \tag{14}$$

即时间复杂性降为与  $n$  成正比。

图 5 给出了 Zernike 基底和正交基底在进行 1~60 项时的时间消耗曲线。在 Zernike 基底求解消耗时间趋势中, 由于 Matlab 底层调用的 LAPACK 对不同阶数矩阵的分块策略不同, 影响了求解时间, 导致中间有断开的现象, 但总体趋势是不变的。从对比结果可以看出: 当计算 60 项多项式系数时, 采用逐项求解方法所耗时间大约是整体求解方法的 1/4, 利用正交多项式显著降低了所消耗的运算时间, 更有利于波前的实时拟合计算。

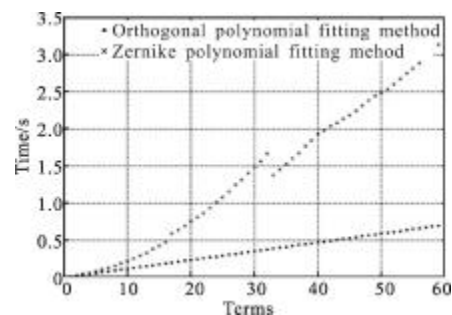


图 5 两种方法计算时间对比

Fig.5 Comparison of computation time

### 3 结论

对非圆孔径的波前数据进行拟合时, 应该根据具体不同的测量对象对 Zernike 多项式在离散化的非圆区域上进行正交化, 通过矩阵的 QR 分解方法得到一组在离散采样点上各项之间彼此独立的正交

基底,增加或者减少项数不影响其他项系数的值,且与像差函数有一致性。文中给出了非圆孔径离散点上的基底正交化方法,并将该方法用于计算 600 mm 大口径干涉仪测量的矩形 ICF 系统的脉宽压缩光栅的反射波前中。将该反射波前用 MetroPro 程序中的 Zernike 多项式和正交多项式分别进行计算,两者拟合波前残差的 PV 和 RMS 值最大分别相差 0.013 以及小于 0.001 波长,说明拟合结果是一致的。Zernike 多项式和正交多项式拟合系数进行对比,表明 Zernike 多项式在非圆孔径的上求解系数时没有一致性,而正交多项式各项之间相互独立,可以直接根据正交多项式的系数计算对应的 Seidel 像差系数。当测量数据较多而又需要求解高阶的系数时,使用正交多项式系数逐项求解,相对于 Zernike 多项式求解可以明显节省计算时间,在实时波前拟合中更具有优势。离散点上的区域正交多项式在不同区域上有良好的正交性,可以应用于波前测量分析与重构、光学设计、大气湍流模型等各个方面。

#### 参考文献:

- [1] Wang Xiaokun. Test on large convex aspherical mirror by subaperture stitching interferometry [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2013, 42(3): 716-722. (in Chinese)
- [2] Zhang Yu, Jin Chunshui, Ma Dongmei, et al. Analysis of measuring errors for the visible light phase shifting point diffraction interferometer [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2012, 41(5): 1351-1356. (in Chinese)
- [3] Peng Jianhua, Shen Yibing, Wang Kaiwei, et al. Error impact analysis and experimental research for absolute testing of spherical surfaces [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2012, 41(5): 1345-1350. (in Chinese)
- [4] Zhang Yanyan, Chen Suting, Li Mei, et al. Wave-front signal extraction of adaptive optical system [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2012, 41(10): 2768-2773. (in Chinese)
- [5] Cao Zhenglin, Liao Wenhe, Shen Jianxin. A new algorithm for human eye's wave-front aberration fitting with Zernike polynomial[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2006, 14(2): 308-314. (in Chinese)
- [6] Ma Dongmei, Chen Tuquan. Test and evaluation of wavefront phase of point diffraction [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2010, 18(11): 2390-2397. (in Chinese)
- [7] Malacara D. *Optical Shop Testing* [M]. 3rd ed. US: John Wiley & Sons, Inc, 2007.
- [8] Hou Xi, Wu Fan, Yang Li, et al. Effect of central obscuration interferograms fitted with Zernike circle polynomials on calculating Seidel aberrations[J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, 26(1): 54-62. (in Chinese)
- [9] Han Zhigang, Chen Lei, Gao Bo, et al. Absolute flatness measurement method based on oblique incidence testing [J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2011, 32(3): 707-712. (in Chinese)
- [10] Upton R, Ellerbroek B. Gram-Schmidt orthogonalization of the Zernike polynomials on apertures of arbitrary shape [J]. *Optics Letters*, 2004, 29(24): 2480-2482.
- [11] Mahajan V N, Dai G M. Orthonormal polynomials for hexagonal pupils[J]. *Optics Letters*, 2006, 31: 2462-2464.
- [12] Dai G M, Mahajan V N. Zernike annular polynomials and atmospheric turbulence[J]. *J Opt Soc Am A*, 2007, 24: 139-155.
- [13] Mahajan V N, Dai G M. Orthonormal polynomials in wavefront analysis: analytical solution [J]. *J Opt Soc Am A*, 2007, 24(9): 2994-3016.
- [14] Mahajan V N, Dai G M. Orthonormal polynomials in wavefront analysis: error analysis [J]. *Applied Optics*, 2008, 47(19): 3433-3445.
- [15] Duan Haifeng, Yang Zeping, Wang Shuqing, et al. Model wavefront reconstruction of Shack-Hartmann sensor on arbitrary area and wavefront expression by Zernike polynomials [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2002, 29(6): 517-520. (in Chinese)
- [16] Li Mengyang, Li Dahai, Wang Qionghua, et al. Wavefront Reconstruction with orthonormal polynomials in a square area [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2012, 39(11): 1108011. (in Chinese)
- [17] Shi Z G, Sui Y X, Liu Z Y, et al. Mathematical construction and perturbation analysis of Zernike discrete orthogonal points [J]. *Applied Optics*, 2012, 51(18): 4210-4214.