

高斯光束整形非球面透镜的粒子群优化设计方法

张爽, 秦华, 杨开, 刘珍

(山东理工大学理学院, 山东淄博 255000)

摘要: 提出了一种设计激光光束整形系统的新方法——粒子群优化算法。根据能量守恒定律, 推导出光束整形系统中任意光线与入射面和出射面交点坐标之间的变换关系, 并把用此变换关系得到的光线与出射面的交点坐标作为目标值。把追迹光线在输出面上的交点坐标与目标值差的绝对值作为光束整形系统的能量分布变换评价函数, 把出射光线方向矢量的 y 分量绝对值作为准直评价函数, 并将能量分布变换评价函数与准直评价函数的和作为光束整形变换系统的总评价函数, 依此函数作为粒子群算法中的适应度函数, 对适应度函数进行极小值操作, 便可得到了一个既能把光强高斯分布转换为光强均匀分布, 又能近似实现光束重新准直的非球面整形透镜系统。用这种方法设计了一个单非球面凹平透镜, 可以把光强高斯分布、光斑半径 30 mm 的红光激光光束整形为光强均匀分布、光斑半径为 36 mm 的平顶光束, 且准直出射。证明这种设计方法简单有效。

关键词: 高斯光束整形; 非球面透镜; 粒子群优化; 评价函数

中图分类号: O435; O439 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3788/IRLA201746.1206005

Particle swarm optimization method for designing aspheric lens Gaussian beam shaping

Zhang Shuang, Qin Hua, Yang Kai, Liu Zhen

(School of Sciences, Shandong University of Technology, Zibo 255000, China)

Abstract: A new method, the particle swarm optimization algorithm for designing the laser beam shaping system was put forward. According to the law of conservation of energy, the transformation relation of the coordinates of two intersection points between an arbitrary ray and the input and output plane can be deduced, and the coordinates of an intersection point between a ray and the output plane achieved based on this relation will be used as the target coordinates. Absolute values of differences between the target coordinates and the corresponding coordinates obtained from the ray tracing will be used as the evaluation function of transformation of energy distribution, the absolute value of the y -component of the direction vector of outgoing ray will be used as the evaluation function of the collimation, and the sum of the evaluation function of energy distribution transformation and the evaluation function of collimation was the total evaluation function of a beam shaping system. Taking this function as the fitness function of the particle swarm optimization algorithm and manipulating it to the minimum value, an aspheric lens can be gotten, which can not only convert an Gaussian intensity distribution into a uniform distribution but also

收稿日期: 2017-04-05; 修订日期: 2017-05-03

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金(11404191); 山东省自然科学基金(ZR2013FM007)

作者简介: 张爽(1992-), 女, 硕士生, 主要从事像差理论和光学设计方面的研究。Email: zfqinh@163.com

导师简介: 秦华(1964-), 男, 副教授, 博士, 主要从事光学设计、激光光束整形及应用方面的研究。Email: zfqinh@qqmail.com

approximately re-collimate the output beam. A single aspheric concave-flat lens was designed by using this method, it can transform red laser beams with a spot radius of 30 mm and a Gaussian intensity profile into flat-topped beams with a spot radius of 36 mm, and output beams can be re-collimated.

Key words: Gaussian beam shaping; aspheric lens; particle swarm optimization; evaluation function

0 引言

在很多激光应用中,例如激光驱动核聚变、激光焊接材料加工、激光医疗等领域常要求光强空间分布均匀的激光光束^[1-2]。由于激光光束能量空间高斯分布,因此,需要通过光束整形将高斯光束转换为能量均匀分布的平顶光束以消除能量不均匀引起的不良效果^[3]。

把高斯光束变为平顶光束的整形工具很多,如有复杂相位函数的衍射光学元件^[4-5]、折射或者反射光学元件^[6-7]、多边形杆状光管整形器件^[8]、微光学元件组^[9]、全息相位片^[10-11]、液晶空间光调制器^[12]等。在众多的整形工具中,折射整形光学元件由于其光能转换效率高、结构简单等特点成为最常用的一种整形工具^[13]。

折射整形光学元件的设计方法一般是利用几何光学知识,根据能量守恒定律,建立出射光线某一点与入射光线上某一点的坐标映射关系,然后由映射关系及斯涅耳定律建立关于两对应点面形的微分方程,通过合理的近似再求解,可获得透镜矢高的导数与透镜半径之间的函数关系式,解出透镜矢高的表达式。这种方法首先由 Frieden 在 1965 年提出,Kreuzer 在 1969 年申请了这种设计方法的专利,此设计方法直到今天还在广泛使用。Rhodes and Hoffnagle 进一步研究和开发了这种在出射光线与入射光线建立确定映射关系的设计技术。更进一步的研究还导致了实际设计步骤的简化和设计算法的更好优化。Cheng-Mu Tsai 等用基因算法设计非球面整形透镜系统,所设计的整形系统可以把入射激光光束整形为具有各种不同光斑形状要求的出射光束。光斑直径从 3 mm 减小到 1.07 mm 时,光强均匀度为 88%;光斑直径从 3 mm 增加到 5.273 mm,光强均匀度为 90%。

粒子群优化(Particle Swarm Optimization, PSO)算法同基因算法一样,也是一种全局优化算法,自 1995 年问世以来,文献检索发现还没有把这种算法

应用到非球面光束整形透镜系统的设计中。文中提出了用粒子群优化算法设计非球面整形透镜系统的新方法。特别是利用粒子群优化算法设计出了单个凹平非球面整形透镜,不但能将高斯光束转化为能量分布均匀的平顶光束而且还能使出射光束重新准直。给出了采用粒子群优化算法进行光束整形系统变换的设计实例,并对设计结果进行了分析讨论。

1 设计方法

这一节描述了用于光强高斯分布变为光强均匀分布的非球面系统的设计新方法——粒子群优化算法。首先根据能量守恒定律推导出了输入与输出光线的位置坐标变换关系,其次,由光线的输入输出坐标及输出光线的方向矢量定义光束整形系统的评价函数,并将评价函数作为粒子群优化算法中的适应度函数,最后分析讨论使适应度函数极小的粒子群优化算法。

1.1 光束整形系统中的能量守恒

图 1 示出了用于把高斯光束整形为平顶光束的单个非球面透镜的大体形状及整形原理示意图。透镜前表面为非球面,后表面为平面,透镜关于光轴旋转对称。

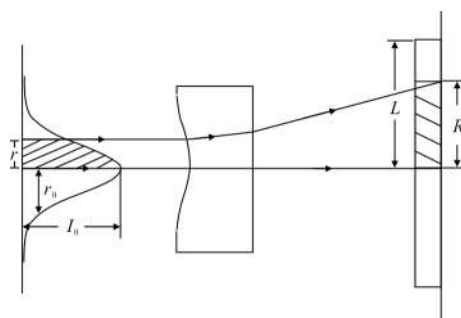


图 1 单非球面透镜变换高斯光束为平顶光束的示意图
Fig.1 Schematic diagram of transformation of a Gaussian beam into a top-hat beam for single aspheric lens

假定,输入高斯光束的光强分布为 $I(r)=I_0\exp(-2r^2/r_0^2)$, I_0 为中心光强, r 为以光束中心为圆心的半径, r_0

为光强等于中心值的 $1/e^2$ 处定义的光斑半径。经过透镜后的输出光束是光强分布为常数 H 的平顶光束,辐照的最大径向宽度为 $2L$ 。显然,输入光束所包围的能量为:

$$A = \int_0^r I_0 e^{-\frac{2r^2}{r_0^2}} 2\pi r dr = \frac{\pi I_0 r_0^2}{2} [1 - e^{-\frac{2r^2}{r_0^2}}] \quad (1)$$

输出光束在半径为 R 的圆内所包围的能量为:

$$B = H\pi R^2 \quad (2)$$

在不考虑材料表面反射及吸收等因素引起的能量损失的前提下,输入光束和输出光束所包围的能量相等,即 $A=B$,则

$$\frac{\pi I_0 r_0^2}{2} [1 - e^{-\frac{2r^2}{r_0^2}}] = H\pi R^2 \quad (3)$$

$$R^2 = \frac{I_0 r_0^2}{2H} [1 - e^{-\frac{2r^2}{r_0^2}}] \quad (4)$$

而且,总的输入能量与输出能量相等

$$H\pi L^2 = -\frac{\pi I_0 r_0^2}{2} [e^{-\frac{2r^2}{r_0^2}}]_0^\infty = \frac{\pi I_0 r_0^2}{2} \quad (5)$$

因此,求出输出光束最大半径

$$L^2 = \frac{I_0 r_0^2}{2H} \quad (6)$$

将此式代入到 $R^2 = \frac{I_0 r_0^2}{2H} [1 - e^{-\frac{2r^2}{r_0^2}}]$ 中,得

$$R = L \sqrt{[1 - e^{-\frac{2r^2}{r_0^2}}]} \quad (7)$$

在实际光束整形系统设计和光强分布分析中,由于系统的旋转对称性,也为了简化计算量,通常在二维空间进行优化分析。由图 2 可知,输入光束所包围的能量为:

$$A = \int_0^y I_0 e^{-\frac{2y^2}{y_0^2}} dy \quad (8)$$

此函数为不可积函数,但在很多涉及高斯分布的情况下需给出这种积分表达式的具体形式,Matlab 中将这类积分函数定义为 erf 函数:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\eta^2} d\eta \quad (9)$$

且有 $\text{erf}(\infty)=1$ 和 $\text{erf}(-x)=-\text{erf}(x)$ 。

对于 $A = \int_0^y I_0 e^{-\frac{2y^2}{y_0^2}} dy$, 进行变量替换, 令 $\zeta =$

$$\frac{\sqrt{2}}{y_0} y, \text{ 则 } dy = \frac{y_0}{\sqrt{2}} d\zeta.$$

$$A = \int_0^y I_0 e^{-\frac{2y^2}{y_0^2}} dy = I_0 \frac{\sqrt{\pi} y_0}{2\sqrt{2}} \cdot \text{erf}[(\sqrt{2}/y_0)y] \quad (10)$$

输出光束在宽度为 R 、光强为 H 的矩形内所包

围的能量: $B=HR$, 根据能量守恒: $A=B$, 则 $I_0 \frac{\sqrt{\pi} y_0}{2\sqrt{2}}$

$\text{erf}[(\sqrt{2}/y_0)y]=HR$, 所以

$$R(y) = I_0 \frac{\sqrt{\pi} y_0}{2\sqrt{2} H} \cdot \text{erf}[(\sqrt{2}/y_0)y] \quad (11)$$

公式(11)表明了入射高为 y 的入射光线与其出射光线在出射面上投射高度 R 之间的函数关系, 满足这个函数关系的光线位置变换则把光强高斯分布完全变为光强均匀的平顶分布。公式(11)将被用来定义光束整形系统的评价函数。

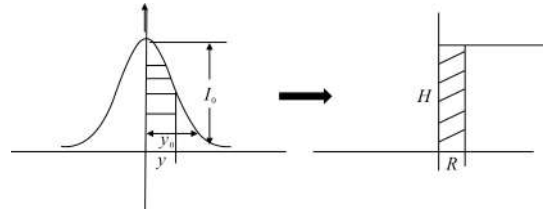


图 2 高斯光束在一维空间内转换为平顶光束的能量变换原理示意图

Fig.2 Schematic diagram of energy conversion of a Gaussian beam into a top-hat beam in one-dimensional space

1.2 评价函数

假定有 N 条光线入射在整形系统上, 第 i 条入射光线在入射面上的入射高为 y_i , 令

$$y_i = (i-1) \frac{y_{\max} - y_{\min}}{N-1} \quad (12)$$

式中: y_{\max} 和 y_{\min} 分别是入射高的最大值和最小值。

假定第 i 条光线经光束整形系统后在出射面上的实际投射高度为 R_{ia} , 其理论投射高度为 R_{it} , 则此光束整形系统的能量分布变换评价函数定义为:

$$F_e = \sum_{i=1}^N |R_{ia} - R_{it}| \quad (13)$$

根据光线的坐标位置赋予每一条光线一权重因子 w_i , 则评价函数 F_e 可改写为:

$$F_e = \sum_{i=1}^N w_i |R_{ia} - R_{it}| \quad (14)$$

式中: R_{it} 由公式(11)和(12)计算得到, 而 R_{ia} 则由光线追迹得到。

建立如图 3 所示的坐标系, 凹平非球面透镜关

于 x 轴旋转对称,假定高斯光束为近似平面波,入射光线平行于 x 轴入射,入射光线单位矢量为 $\vec{Q}_i(\alpha_i, 0, 0)$ 。入射光线上一点 $P_i(x_i, y_i, 0)$,其相应出射光线与出射平面的交点坐标为 $P_B(x_B, y_B, 0)$,可由两个已知量 $\vec{Q}_i(\alpha_i, 0, 0)$ 和 $P_i(x_i, y_i, 0)$ 以及前后两个折射面的面型方程、透镜前后两面顶点之间的距离 d_1 、透镜后表面顶点到出射面的距离 d_2 及折射定律求出^[14], P_B 中的 y_B 就是公式(14)中的 R_{ia} 。如此可以由公式(14)求出评价函数 F_e 。由以上分析可知,当 \vec{Q}_i 和 P_i 被确定后,系统的评价函数就只是非球面系统结构参数的函数,只要适当选择非球面系统的结构参数,就能使整形系统的评价函数达到极小。

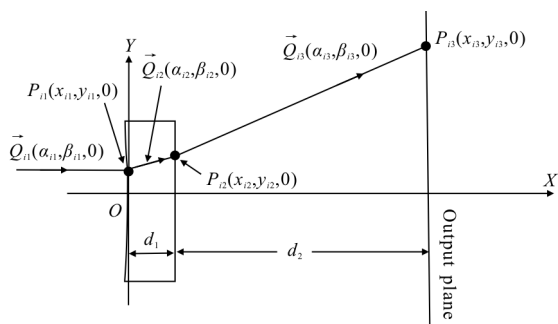


图 3 光线追迹过程示意图

Fig.3 Schematic diagram of ray tracing process

为了使整形后的平顶光束在较长的工作距离下使用,以便使传统的光学元件更容易操作,比如放大或聚焦等,往往需要把整形后的平顶光束重新变为准直光束。为此,在能量分布变换评价函数公式(14)的基础上再添加一项

$$F_\beta = \sum_{i=1}^N w_{\beta i} |\beta_{\beta i}| \quad (15)$$

式中: $\beta_{\beta i}$ 为第 i 条出射光线沿 y 方向的方向余弦,也就是图 3 中 $\vec{Q}_B(\alpha_B, \beta_B, 0)$ 的 β_B 分量,可由光线追迹得到^[14]。当 \vec{Q}_B 和 P_B 被确定后, β_B 也只是非球面系统结构参数的函数,当 $\beta_B=0$ 时,出射光线平行 x 轴,若所有出射光线都平行 x 轴,则光束准直射。 $w_{\beta i}$ 是每一条光线在这部分评价函数中的权重因子。把 F_β 称作准直评价函数,公式(14)与(15)的和定义为整形透镜系统的评价函数,变为公式(16):

$$F = \sum_{i=1}^N w_{ri} |R_{ia} - R_{it}| + \sum_{i=1}^N w_{\beta i} |\beta_{\beta i}| \quad (16)$$

使 F 极小的非球面系统结构参数就是使高斯光

束变为平顶光束且准直射的整形系统结构参数。

1.3 用于光束整形系统设计的粒子群优化算法

粒子群优化算法已经被应用于光学系统的设计之中^[14-15]。在光束整形系统中,把整形系统的评价函数作为粒子群优化算法中的适应度函数,对适应度函数进行极小值操作,与适应度函数极小值对应的一组非球面系统的结构参数就是所要设计的整形系统的结构参数。

2 设计实例

文中的实例中所要设计的整形透镜的大致形状如图 1 所示,其前表面为凹状非球面,后表面为平面。其特点就是正的 y_i 变为正值的 y_B ,如图 3 所示。透镜材料选用 SK2 光学玻璃,其对红光的折射率为 1.601 681,透镜表面为旋转对称的非球面,用以下偶次非球面方程描述:

$$x = \frac{Ch^2}{1 + \sqrt{1 - h^2 C^2 (1 + a_2)}} + \sum_{j=2}^5 a_{2j} h^{2j} \quad (17)$$

式中: $h = \sqrt{y^2 + z^2}$, 为非球面某点的垂轴高度; C 为非球镜面的曲率; a_2 为圆锥常数; a_{2j} 为非球面形变系数; x 轴为光轴,也为整个系统的对称轴; y 轴与 z 轴如图 3 所示。因此,光束整形系统结构变量就是 C 、 a_2 、 a_{2j} 以及透镜前后两面顶点之间的距离 d_1 ,透镜后表面顶点到出射面的距离 d_2 ,总计 8 个变量,也就是说粒子群优化算法中每一粒子位置矢量的维数是 8。

假定输入高斯光束的光强分布为 $I(y) = I_0 \exp(-2y^2/y_0^2)$,令 $I_0=1$,高斯光斑半径 $y_0=30$ mm,出射光束的辐照光强 $H=0.5$,则由图 2 和公式(11)得到 R 与 y 的映射关系:

$$R = P_0 \frac{\sqrt{\pi} y_0}{2\sqrt{2} H} \cdot \text{erf}[(\sqrt{2}/y_0)y] = \frac{30\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \cdot \text{erf}[(\sqrt{2}/30)y] \quad (18)$$

由图 3 可知,正的 $y_i(r)$ 变为正值的 y_B ,则公式(14)和(16)中 R_{it} 应该写为:

$$R_{it}(y_{in}) = \frac{30\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \cdot \text{erf}[(\sqrt{2}/30)y_{in}] \quad (19)$$

把公式(19)和经过光线追迹得到 R_{ia} 、 β_B 代入到公式(16)中,取 $w_r=1$, $N=401$,并把公式(16)作为粒子群优化算法中的适应度函数。每一粒子位置矢量有 8 个分量,每一分量的取值范围由实际情况自由确定。表 1

列出了所要优化的 8 个结构参数的取值范围即搜索范围。令粒子群算法的迭代次数为 2 000 次, 在 PC 机上运行自编粒子群优化算法 Matlab 程序 25 min 左

右, 得到如表 2 所列的结构参数数据。图 4 是根据表 2 中的数据做出的整形透镜的二维形状图与光束经过整形透镜的光线追迹图。

表 1 单非球面光束整形透镜结构参数的搜索范围

Tab.1 Search range of structure coefficients of a single aspheric lens with laser beam shaping

	C/mm^{-1}	a_2	a_4	a_6	a_8	a_{10}	d_1/mm	d_2/mm
Front surface	$[-0.2, 0]$	$[-200, 0]$	$[-5 \times 10^{-7}, 5 \times 10^{-7}]$	$[-5 \times 10^{-11}, 5 \times 10^{-11}]$	$[-5 \times 10^{-14}, 5 \times 10^{-14}]$	$[-5 \times 10^{-17}, 5 \times 10^{-17}]$	$[8, 40]$	$[10, 500]$

表 2 单非球面光束整形透镜的结构参数优化结果

Tab.2 Optimization results of structure coefficients of a single aspheric lens with laser beam shaping

	C/mm^{-1}	a_2	a_4	a_6	a_8	a_{10}	d_1/mm	d_2/mm
Front surface	-0.003 807	-184.311 1	$4.502 6 \times 10^{-7}$	-5.0×10^{-11}	$-9.409 1 \times 10^{-15}$	$8.828 7 \times 10^{-18}$	11.918 7	430.464 5

从图 4 可以看出, 光线密度高斯分布的入射光束经此非球面透镜后变换为光线密度均匀且近似平行光轴的出射光束。按高斯密度分布的 10 万条入射光线追迹, 计算出相应出射光线与光轴夹角的最大值为 $1.390 7^\circ$, 从理论上说明出射光束近似准直。从图 4 中还可以看出, 光束输出平面上边缘光线密度稍大一些, 这与图 5 的所示的光强分布吻合。图 5(a) 是单非球面透镜在其光束输出面上的一维光强分布模拟图, 是由 100 万条光线按其在输出面上的位置分布统计得到, 100 万条光线入射时光线密度是高斯分布, 出射时变换为近似均匀的平顶分布。图 5(b) 是出射光束在输出面上三维光强分布模拟图, 可以更形象地看出光强在空间中的分布实际形状。从图 5(a)、(b) 中可以更清楚地看出, 输入高斯光束确已被转换为近似均匀分布的平顶光束。这也证明, 用粒子群优化算法进行光束整形系统设计的可行性。

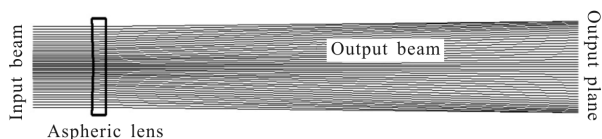


图 4 单非球面透镜光束变换过程二维光路模拟图

Fig.4 Simulation diagram of two-dimensional optical path of single aspheric lens beam transformation process

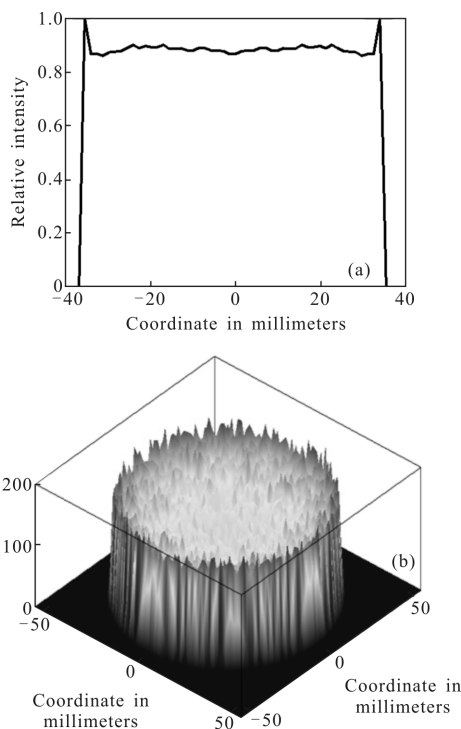


图 5 单非球面透镜在其光束输出面上的一维三维光强分布模拟

Fig.5 One and three dimensional plots of relative light intensity on the output plane of designed aspheric lens with beam shaping

3 结论

文中提出了一种用粒子群优化算法设计非球面

整形透镜的新方法,目的是通过非球面整形透镜把高斯光束转换为平顶光束且准直出射。文中根据能量守恒定律,推导出光束整形系统中任意光线在入射面与输出面上的交点的坐标变换关系。由这种变换关系得到的光线在输出面上的交点坐标值作为目标值,由折射定律和透镜曲面的面型方程追迹相应光线在输出面上的交点坐标作为实际值,实际值与目标值差的绝对值构成光束整形系统的能量分布变换评价函数,出射光线方向矢量的 y 分量绝对值作为准直评价函数。能量分布变换评价函数与准直评价函数和作为光束整形系统的总评价函数,依此总评价函数作为粒子群优化算法中的总适应度函数。通过自编的粒子群优化算法 Matlab 程序搜索使适应度函数极小的整形透镜结构参数,设计出能把光斑半径为 30 mm 的高斯光束整形为光斑半径为 36 mm 的准直平顶光束的单个非球面光束整形透镜。通过光线追迹分析可以看出,此整形透镜可以把光强高斯分布的入射光束转换为光强均匀分布的平顶光束,且光束准直出射。此设计实例证明了用粒子群优化算法设计非球面整形透镜的有效性和实用性。这种设计方法,意义明了、过程简单,具有重要的工程应用价值。

参考文献:

- [1] Liu Zhihui, Shi Zhendong, Yang Huan, et al. Homogenization of semiconductor laser using diffractive micro-lens array[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2014, 43(7): 2092–2096. (in Chinese)
刘志辉, 石振东, 杨欢, 等. 衍射微透镜阵列用于半导体激光光束匀化[J]. 红外与激光工程, 2014, 43(7): 2092–2096.
- [2] Liu Hua. Gaussian beam shaping diffractive optical element designed by Hankel transformation[J]. *Chinese Optics*, 2016, 9(2): 277–283. (in Chinese)
刘华. 利用汉克尔变换设计高斯光束整形衍射元件的应用研究[J]. 中国光学, 2016, 9(2): 277–283.
- [3] Gao Yuhan, An Zhiyong, Li Na'na, et al. Optical design of Gaussian beam shaping [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2011, 19(7): 1464–1470. (in Chinese)
高瑀含, 安志勇, 李娜娜, 等. 高斯光束整形系统的光学设计[J]. 光学 精密工程, 2011, 19(7): 1464–1470.
- [4] Nie Shuzhen, Yu Jin, Yu Gang, et al. Study on the shaped laser beam with linear spot array [J]. *Acta Optica Sinica*, 2014, 34(S2): 0205001. (in Chinese)
- [5] Zhu Linwei, Sun Meiyu, Zhu Mengjun, et al. Three-dimensional shape-controllable focal spot array created by focusing vortex beams modulated by multi-value pure-phase grating[J]. *Optics Express*, 2014, 22(18): 21354–21367.
- [6] Du Meng, Xing Tingwen, Yuan Jiahu. Application of micromirror array in beam shaping [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2014, 43(4): 1210–1214. (in Chinese)
杜猛, 邢廷文, 袁家虎. 微反射镜阵列在光束整形中的应用[J]. 红外与激光工程, 2014, 43(4): 1210–1214.
- [7] Fan Zengming, Li Zhuo, Qian Lixun. Aspherical lens laser beam shaping system [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2012, 41(2): 353–357. (in Chinese)
范增明, 李卓, 钱丽勋. 非球面透镜组激光光束整形系统[J]. 红外与激光工程, 2012, 41(2): 353–357.
- [8] Zhu Guangzhi, Zhu Xiao, Zhu Changhong. Analytical approach of laser beam propagation in the hollow polygonal light pipe[J]. *Applied Optics*, 2013, 52(23): 5019–5029.
- [9] Liu Youqiang, Cao Yinhua, Pan Fei, et al. Beam transformation of diode lasers used in laser processing [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2012, 20(3): 455–461. (in Chinese)
刘友强, 曹银花, 潘飞, 等. 激光加工用半导体激光器的光束变换[J]. 光学 精密工程, 2012, 20(3): 455–461.
- [10] Jiho Han, Martin Sparkes, William O'Neil. Controlling the optical fiber output beam profile by focused ion beam machining of a phase hologram on fiber tip [J]. *Applied Optics*, 2015, 54(4): 890–894.
- [11] Staoshi Hasegawa, Koji Shiono, Yoshio Hayasaki. Femtosecond laser processing with a holographic line-shaped beam [J]. *Optics Express*, 2015, 23(18): 23185–23194.
- [12] Maxson J M, Bartnik A C, Bazarov I V. Efficient and accurate laser shaping with liquid crystal spatial light modulators[J]. *Appl Phys Lett*, 2014, 105: 171109.
- [13] Romero L A, Dickey F M. Lossless laser beam shaping[J]. *J Opt Soc Am A*, 1996, 13(4): 751–760.
- [14] Qin Hua, Feng Dongtai, Ge Shuoshuo, et al. Optical design of compound aspherical solar concentrating mirror [J]. *Chinese Optics*, 2014, 7(5): 844–854. (in Chinese)
秦华, 冯东太, 葛硕硕, 等. 组合非球面太阳能聚光镜的光学设计[J]. 中国光学, 2014, 7(5): 844–854.
- [15] Hua Qin. Aberration correction of a single aspheric lens with particle swarm algorithm [J]. *Optics Communications*, 2012, 285(13–14): 2996–3000.