

## 基于波前相位单纯形样条函数建模的空间目标波前解卷积方法

郭世平<sup>1,2</sup>, 杨 宁<sup>1</sup>, 张子腾<sup>1</sup>, 胡苏海<sup>1</sup>, 张荣之<sup>2</sup>

(1. 西北工业大学 自动化学院, 陕西 西安 710129;

2. 西安卫星测控中心 宇航动力学国家重点实验室, 陕西 西安 710043)

**摘 要:** 针对空间目标地基自适应光学望远镜成像过程中同时记录目标图像及波前传感器数据的情形, 提出了一种利用波前测量数据的空间目标自适应光学图像复原方法。该方法将大气降质波前表示为望远镜孔径内的二元单纯形样条函数, 而非传统的 Zernike 模式的线性组合, 基于该区域表示, 为哈特曼-夏克波前传感器建立了平均斜率测量模型, 进而非适定的波前重构问题转化为良态等式约束最小二乘问题, 最终的目标图像即可通过非盲解卷积方法获得。仿真实验验证了提出的方法在不同的湍流强度下均能表现出良好的复原效果, 对测量噪声亦不敏感。

**关键词:** 自适应光学; 图像复原; 波前重构; 单纯形样条; 区域法

**中图分类号:** TP751; O439 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3788/IRLA201948.0117004

## Space object deconvolution from wavefront sensing by wavefront phase modelling based on simplex splines function

Guo Shiping<sup>1,2</sup>, Yang Ning<sup>1</sup>, Zhang Ziteng<sup>1</sup>, Hu Suhai<sup>1</sup>, Zhang Rongzhi<sup>2</sup>

(1. School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China;

2. State Key Laboratory of Astronautic Dynamics, Xi'an Satellite Control Center, Xi'an 710043, China)

**Abstract:** An image restoration method for ground-based adaptive optics telescope imaging was proposed in the case of simultaneous recording of short exposure images and wavefront sensor measurements. The proposed method was based on a zonal representation of the turbulence-degraded wavefront phase using bivariate simplex splines function, instead of the traditional Zernike modal decomposition; an average slopes measurement model for Shack-Hartmann wavefront sensor was then built based on the zonal representation method, which transformed the ill-posed wavefront reconstruction problem into a well-conditioned equality constrained least squares problem. The object image was finally obtained by non-blind Richardson-Lucy iterative deconvolution. Simulated experiments show that the proposed method performs superior image restoration results and noise suppression capability in different turbulence strength.

**Key words:** adaptive optics; image restoration; wavefront reconstruction; simplex splines; zonal method

收稿日期: 2018-08-07; 修订日期: 2018-09-10

基金项目: 国家自然科学基金(61308083, 61773315)

作者简介: 郭世平(1985-), 男, 助理教授, 博士, 主要从事计算成像技术及其应用、光学图像处理与分析等方面的研究。

Email: guoship@163.com

通讯作者: 杨宁(1977-), 女, 副教授, 博士, 主要从事计算机视觉、数字图像处理、人工智能及大数据分析等方面的研究。

Email: ningyang@nwpu.edu.cn.

## 0 引言

自适应光学系统中哈特曼-夏克波前传感器 (Wave-front sensor, WFS) 可以测得波前相位的部分水平及垂直方向梯度信息, 这些不完全的梯度数据对目标图像的复原是有帮助的<sup>[1-5]</sup>。针对同时记录 WFS 数据及目标图像的情形, 可先利用波前测量数据去重构畸变波前, 进而由公式(2)估计大气降质点扩散函数, 最终的目标图像即可通过非盲类的解卷积方法获得。传统的面向后处理的波前重构方法基于波前相位的 Zernike 模式分解<sup>[1]</sup>, 并将重构问题归结为求解线性方程组, 但 Zernike 模式法中交互矩阵的秩是不完备的, 这使得梯度测量误差被放大, 重构精度很低。针对此, 文中提出了一种基于波前相位区域表示的高精度重构方法: 该方法将大气降质波前表示为望远镜孔径内的二元单纯形样条函数<sup>[6]</sup>, 并为哈特曼-夏克波前传感器建立了基于此区域表示的平均斜率测量模型, 利用波前传感器测量数据去回归样条系数, 进而唯一地确定畸变波前。该方法在整个重构过程中不出现奇异矩阵, 将不适定的波前重构问题转化为良态的等式约束最小二乘问题, 保证了大气瞬时点扩散函数的估计精度, 进而带来更优的目标图像复原效果。

## 1 利用波前测量数据的空间目标图像复原方法原理

地基自适应光学望远镜获得的空间目标图像被大气湍流严重模糊, 为获得对进一步的识别起关键作用的目标图像信息, 后处理技术往往是关键且有效的。地基自适应光学成像过程通常被认为是等晕及非相干的<sup>[1,2,5]</sup>, 即:

$$g(x, y) = f(x, y) \otimes h(x, y) + n(x, y) \quad (1)$$

式中:  $f(x, y)$  为真实的目标图像;  $g(x, y)$  为获得的观

测图像;  $n(x, y)$  表示加性噪声;  $\otimes$  为卷积操作;  $h(x, y)$  表示大气降质点扩散函数(Point spread function, PSF)。针对短曝光成像,  $h(x, y)$  可近似表示为<sup>[5]</sup>:

$$h(x, y) = |\text{FT}^{-1}\{P(x, y)\exp[j\phi(x, y)]\}|^2 \quad (2)$$

式中:  $\text{FT}^{-1}$  为逆傅里叶变换;  $P(x, y)$  为望远镜孔径函数;  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\phi(x, y)$  表示由大气湍流引入的畸变波前相位。

与 Zernike 模式分解表示法不同, 文中将降质波前  $\phi(x, y)$  建模为望远镜孔径内的二元单纯形样条函数。此区域表示法的基函数是以面积坐标形式表征的 Bernstein 基多项式, 整个望远镜孔径区域被分割为  $J$  个邻接的单纯形(二维情况下为三角形), 所有  $J$  个三角形构成整个波前区域的三角剖分  $T_j$ ; 首先将每个三角形  $t$  上的波前相位建模为  $d$  次样条多项式  $p_t$ :

$$p_t = \sum_{i+j+k=d} c_{ijk} B_{ijk}^d \quad (3)$$

式中:  $B_{ijk}^d$  为 Bernstein 基多项式;  $c_{ijk}$  为  $B$ -系数以唯一确定  $p_t$ ;  $i, j, k$  为非负整数且  $i+j+k=d$ ; 整个望远镜孔径内的波前相位为所有  $J$  个  $p_t$  的光滑拼接, 并满足连续性约束条件<sup>[6]</sup>(连续性阶数  $r \leq d$ )。将以上描述表达为矩阵向量相乘的形式, 即:

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= P_d^r(x, y) + \omega(x, y) = B^d \cdot c + \omega(x, y) \\ \text{s.t. } E_c c &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

式中:  $P_d^r(x, y) = B^d \cdot c$  即为用来逼近波前相位的二元单纯形样条多项式;  $B^d$  为全局 Bernstein 基多项式行向量;  $c$  为全局  $B$ -系数列向量用来唯一地确定波前相位  $\phi(x, y)$ ;  $\omega(x, y)$  用来表示逼近误差;  $E_c$  为连续性约束矩阵。以上提到的几个基本概念如单纯形、面积坐标、三角剖分、Bernstein 基、连续性约束以及下文将要出现的概念如 de Casteljau 矩阵、单纯形上的积分与方向导数等, 烦请读者参考文献[7], 这里将波前相位的单纯形样条函数表示法与传统的 Zernike 模式分解法的区别总结于表 1。

表 1 波前相位的单纯形样条函数表示法与 Zernike 多项式表示法的区别

Tab.1 Comparison of simplex splines function method and Zernike polynomials method for wavefront phase

	Descriptions	Basis function	Polynomials	Coefficients	Coefficient constraints	Model error
Zernike method	Mode method	Product of radial basis and angle basis	Zernike polynomials	Mode coefficients	Coefficient statistical correlation	Mode total orders
Simplex splines function method	Zonal method	Bernstein basis	$B$ -form polynomials	Global $B$ -coefficients	Continuity conditions	Triangulation form, selections of $d, r$

### 1.1 波前传感器平均斜率测量模型

哈特曼-夏克波前传感器测量每个子孔径内波前相位的平均偏移量<sup>[2,3,7]</sup>,在波前相位的区域描述公式(4)下,每个子孔径内  $u$  方向上的平均斜率可以通过计算子孔径内此方向上方向导数的积分除以子孔径的面积来得到。单纯形上  $u$  方向的方向导数是一个降阶的、由新的样条系数确定的样条多项式,新样条系数与原样条系数之间的关系由 de Casteljau 矩阵确定;而单纯形上积分的结果是一个常数,其值由样条多项式次数、样条系数以及单纯形的面积共同确定<sup>[7]</sup>。图 1 为两种常见的微透镜阵列排布方式(左为方形排列,右为六边形排列)下子孔径内的子三角剖分示例图,子孔径区域共被划分为  $S$  个(分别为 4 和 6)三角形,子孔径内方向导数的积分为此  $S$  个三角形上方向导数积分的和,除以子孔径的面积后得到此子孔径内  $u$  方向(水平或垂直)上平均斜率  $\bar{\sigma}_u$  的表达式:

$$\bar{\sigma}_u = \frac{2}{S(d+1)} \sum_{s=1}^S W_s^{d,d-1}(a) \cdot c_s \quad (5)$$

式中:  $a$  为用来描述方向  $u$  的三元组;  $W_s^{d,d-1}(a)$  为 de Casteljau 矩阵按各列相加得到的行向量,下标  $s$  表示子三角剖分内的第  $s$  个三角形。

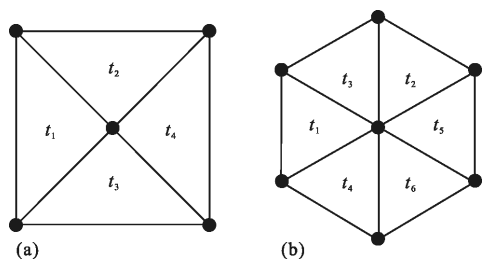


图 1 四边形、六边形微透镜阵列排布方式子孔径内的子三角剖分形式

Fig.1 Two kinds of sub-triangulation configuration based on square and hexagonal geometry of lenslet arrays

将公式(5)重新表达为与 Zernike 模式法波前重构时类似的矩阵向量相乘的形式:

$$\bar{\sigma} = Gc \quad (6)$$

式中:  $\bar{\sigma} = [\bar{\sigma}_x; \bar{\sigma}_y]$  为所有子孔径内两方向的斜率测量向量;  $G$  为分块测量矩阵,也即波前传感器平均斜率测量模型的交互矩阵,  $G$  的每一块为由公式(5)所构造的行向量。公式(4)结合公式(6)即为文中所提出的基于

相位区域表示的波前传感器平均斜率测量模型。

### 1.2 利用波前测量数据的事后处理流程

由公式(4),波前相位被全局  $B$ -系数  $c$  唯一确定,然而我们知道当从一个变量的导数信息去重构该变量时常数项是不确定的,为此文中再提出一个约束项。畸变波前通常被认为是零均值的、高斯的,并服从 Kolmogorov 统计<sup>[1]</sup>。文中利用畸变波前的零均值假设,提出一项对全局  $B$ -系数的约束项,即波前相位的均值约束(Mean value constraint, MVC)。整个波前相位的均值可通过计算望远镜孔径内相位的积分除以全孔径面积来得到,并将 MVC 归结为统一的矩阵向量相乘的形式:

$$E_m c = 0 \quad (7)$$

式中:  $E_m$  为 MVC 约束向量;  $E_m$  的每个元素均为 1。这样,再结合公式(4),最终的约束矩阵变为  $E = [E_c; E_m]$ ,进而结合公式(6),最终文中构造出一个对全局  $B$ -系数  $c$  的良态估计器:

$$\bar{\sigma} = Gc \quad 0 = Ec \quad (8)$$

由求解最小二乘问题的零空间法<sup>[8]</sup>可得  $c$  的唯一解:

$$c = N_E (D^T D)^{-1} D^T \bar{\sigma} \quad (9)$$

式中:  $N_E$  为  $E$  的零空间的一组基,且  $D = GN_E$ ,这里的  $D^T D$  是可逆的。由公式(4)得到全局  $B$ -系数  $c$  的估计即可唯一确定波前相位,进而由公式(2)即可得到短曝光成像的瞬时点扩散函数;最终的目标图像可由非盲类的解卷积方法获得,考虑到 Richardson-Lucy 算法<sup>[9-10]</sup>对光子噪声的适用性,文中选用此方法,通过较少的迭代次数即得到高质量的目标图像。

## 2 仿真实验及结果

文中采用的仿真实验基于云南天文台 1.2 m 61 单元自适应光学望远镜<sup>[11-12]</sup>,实验前需要仿真或预先计算以下参数:(1)波前相位及波前传感器梯度测量值;(2)望远镜孔径内的完全三角剖分形式。基于 Noll 的方法<sup>[13]</sup>,文中用 151 阶 Zernike 多项式来仿真波前相位及其梯度信息;基于微透镜阵列的正六边形排布,望远镜孔径内的三角剖分由 Delaunay<sup>[7]</sup>算法获得。图 2 为光学系统微透镜阵列的排布方式及基于此得到的完全三角剖分形式,微透镜阵列共包括 60 个有效的子孔径,整个波前区域被分割为 360 个

三角形。

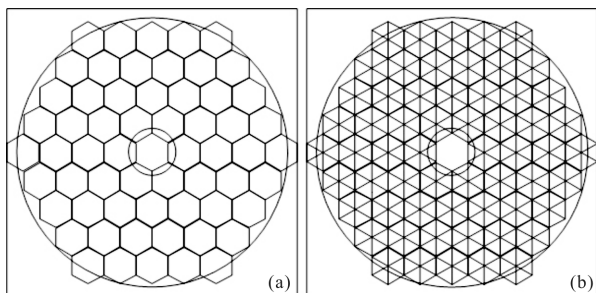


图 2 实验中用到的微透镜阵列排布方式及相应的三角剖分形式;微透镜阵列共包括 60 个有效的子孔径,整个波前区域被分割为 360 个三角形

Fig.2 Geometry arrangement of the microlens array and the corresponding triangulation used in simulation. The microlens array consists of 60 effective subapertures, and the full wavefront region contains 360 triangles

实验中用不同的  $D/r_0$  ( $D$  为望远镜直径,  $r_0$  为大气相干长度) 值来表征不同的湍流强度, 结果表明, 文中提出的方法即使在强湍流条件下 PSF 估计的相对误差可降低到 0.635, 从图像后处理的角度讲此结果具有很高的精度。如表 2 所示, 将文中的方法与 Jefferies 团队的方法<sup>[6]</sup>做了结果对比, 文中的方法在不同的湍流强度下均表现出良好的复原效果。图 3 中第一行为不同湍流强度(湍流强度基于表 2)下的模糊图像, 第二行为相对应的复原结果, 由图 4 可见, 目标的一些关键结构信息通过文中的方法均被不同程度地恢复了出来。

表 2 相对误差结果统计

Tab.2 Result statistics by relative errors

	$D/r_0$	Jefferies methods	Method of this paper
PSF	15	0.570 7	0.161 1
	30	0.842 8	0.508 6
	50	1.030 0	0.635 0
Image	15	0.074 6	0.049 4
	30	0.212 2	0.091 0
	50	0.353 9	0.217 6

图 4 为中等湍流强度下( $r_0=8$  cm)通过文中的方法重构出的波前相位(右上)及大气 PSF(右下)结果, 在重构的相位内可看到一些三角剖分的边的痕迹, 但并不影响整体的重构精度。文中同时也考虑了不同测量噪声水平下方法的性能, 如表 3 所示( $r_0=8$  cm

结果), 针对不同的噪声水平, 文中的方法对 PSF 估计的相对误差波动范围很小, 这种对波前传感器测量噪声的不敏感性在实际的目标图像复原中是很重要的。

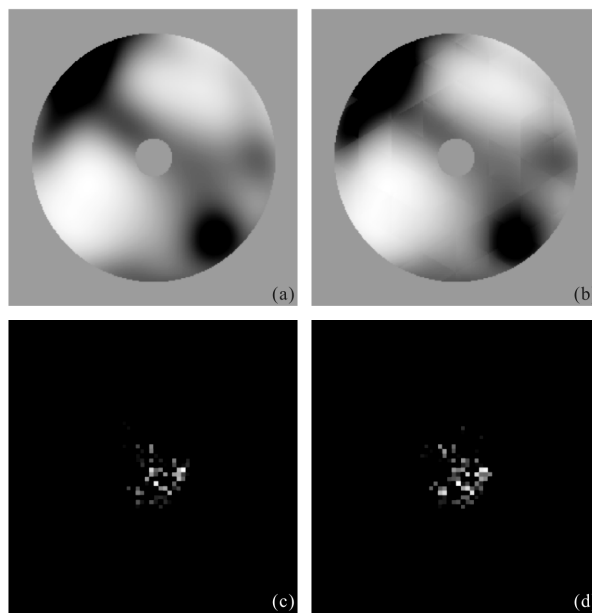


图 3 基于文中方法重构出的波前相位与 PSF 重构结果  
Fig.3 Wavefront phase and PSF reconstruction results by our proposed method

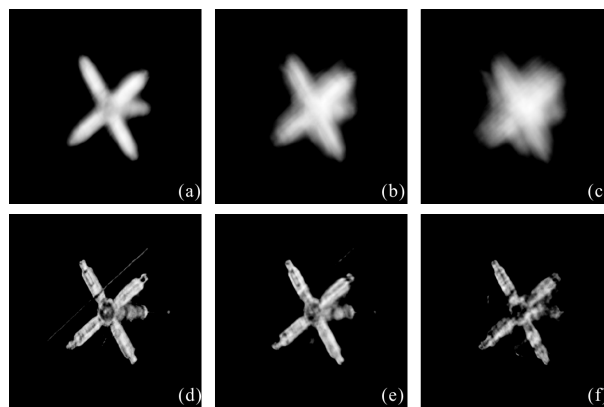


图 4 不同湍流强度下目标图像复原结果  
Fig.4 Object images restoration results in different turbulence strength

表 3 不同 WFS 测量噪声水平下 PSF 估计相对误差结果

Tab.3 Relative error results of PSF estimation in different WFS noise levels

SNR /dB	-1	0.1	1	10	20	30	40
PSF error	0.147 2	0.144 6	0.141 0	0.130 0	0.129 5	0.129 3	0.129 1

### 3 结 论

文中提出了一种短曝光成像中利用波前传感器测量数据去复原地基自适应光学图像的方法,该方法基于对波前相位的区域表示而非 Zernike 模式分解,整个的后处理过程并不会丢失湍流波前相位携带的高频信息,也不会出现奇异矩阵。仿真实验结果验证了文中提出方法的复原性能及噪声抑制能力。在地基自适应光学图像后处理的过程中,波前重构与图像复原都属于是不适定的逆问题,通过文中的方法可以将波前重构问题转化为良态问题。实际中,地基成像设备波前传感器与成像 CCD 往往工作频率不一致,下一步工作将研究基于文中降质波前相位区域表示法去利用多帧波前斜率测量数据恢复目标图像的方法。

#### 参考文献:

- [1] Mugnier L M, Robert C, Conan J M, et al. Myopic deconvolution from wave-front sensing[J]. *J Opt Soc Am A*, 2001, 18: 862–872.
- [2] Zhang Yuye, Zhou Shengming, Zhao Yuliang, et al. Motion-blurred image deblurring of fast moving target [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2017, 46(4): 0428001. (in Chinese)  
张玉叶, 周胜明, 赵育良, 等. 高速运动目标的运动模糊图像复原研究[J]. 红外与激光工程, 2017, 46(4): 0428001.
- [3] Primot J. Theoretical description of Shack-Hartmann wave-front sensor[J]. *Optics Communications*, 2003, 222: 81–92.
- [4] Wang Xiaopeng, Liu Ke, Li Yanqiu. Slope and curvature signal extraction algorithm based on subaperture wavefront amplitude modulation [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2017, 46(12): 1217003. (in Chinese)  
王晓鹏, 刘克, 李艳秋. 基于子孔径波前振幅调制的斜率和曲率信号提取算法 [J]. 红外与激光工程, 2017, 46(12): 1217003.
- [5] C C de Visser, Verhaegen M. Wavefront reconstruction in adaptive optics systems using nonlinear multivariate splines [J]. *J Opt Soc Am A*, 2013, 30: 82–95.
- [6] Lai M –J, Schumaker L L. Spline Functions on Triangulations [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- [7] Jefferies S M, Hart M. Deconvolution from wave front sensing using the frozen flow hypothesis [J]. *Opt Express*, 2011, 19: 1975–1984.
- [8] Lawson C L, Hanson R J. Solving Least Squares Problems [M]. US: SIAM, 1995.
- [9] Lucy L B. An iterative technique for the rectification of observed distributions [J]. *The Astronomical Journal*, 1974, 79: 745.
- [10] Richards W H. Bayesian-based iterative method of image restoration[J]. *J Opt Soc Am*, 1972, 62: 55–59.
- [11] Noll R J. Zernike polynomials and atmospheric-turbulence[J]. *J Opt Soc Am*, 1976, 66: 207–211.
- [12] Bao Hua, Rao Changhui, Tian Yu, et al. Research progress on adaptive optical image post reconstruction [J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2018, 45(3): 170730. (in Chinese)  
鲍华, 饶长辉, 田雨, 等. 自适应光学图像事后重建技术研究进展[J]. 光电工程, 2018, 45(3): 170730.
- [13] Rao C, Jiang W, Zhang Y, et al. Performance on the 61 – element upgraded adaptive optical system for 1.2 – m telescope of the Yunnan Observatory [C]//Adaptive Optics and Applications III. International Society for Optics and Photonics, 2004, 5639: 11–21.