

## 基于相位混合算法的衍射光学元件优化设计方法

俞建杰, 马 晶, 谭立英, 韩琦琦

(哈尔滨工业大学 可调谐激光技术国家级重点实验室 仪器科学与技术博士后流动站,  
黑龙江 哈尔滨 150080)

**摘 要:** 在光束整形衍射光学元件的设计中, 为提高目标衍射图样的重构精度, 提出了一种基于相位混合的迭代算法。该算法采用复振幅每次迭代循环的初始相位与返回相位的加权和为驱动函数, 并以每次循环开始和结束时的光强比较作为光束相位变换的判据。简单讨论了 Gerchberg-Saxton(GS)算法的缺陷, 并以高斯分布-均匀分布和高斯分布-环分布为例, 对比了改进算法与 GS 算法的设计结果。计算机仿真结果表明, 改进算法的极限收敛精度比 GS 算法高几个数量级, 其能量利用率、顶部不均匀性等指标也均优于 GS 算法。该算法能获得重构精度较高的输出图样, 对衍射光学元件的优化设计具体参考意义。

**关键词:** 衍射光学; 相位恢复; 光束整形; 相位混合算法; 迭代傅里叶算法

**中图分类号:** O436 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2276(2013)09-2472-06

## Phase-mixture algorithm applied to design of diffractive optical elements

Yu Jianjie, Ma Jing, Tan Liying, Han Qiqi

(Post-doctoral Mobile Station of Instruments Science and Technology, National Key Laboratory of Tunable Laser Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

**Abstract:** A modified iterative algorithm based on phase mixture was put forward in designing diffractive optical elements, aiming at recovering diffractive patterns of the output beam precisely. Different from Gerchberg-Saxton algorithm, in this paper, the new phase initiation was set as the weighted sum of the two phase functions in the succeeding neighbor loops to be immune from trapping local minimum. The formulas for calculating phase factor were given, and the selection of phase factor was discussed. The beam transformations from Gaussian distribution to uniform and to annular distribution were exemplified to investigate with Gerchberg-Saxton algorithm and the proposed algorithm. The numerical result demonstrates a nearly uniform and annular target profile, and the ultimate mean square error, top beam uniformity, and energy efficiency of the proposed algorithm were all more excellent than Gerchberg-Saxton algorithm. This work can obtain better output diffraction pattern, and has reference value for the design of diffractive optical elements

**Key words:** diffractive optics; phase retrieval; beam shaping; phase-mixture algorithm; iterative fourier transform algorithm

收稿日期: 2013-01-12; 修订日期: 2013-02-14

基金项目: 国家自然科学基金(10904026); 黑龙江省博士后基金(LBH-Z10140)

作者简介: 俞建杰(1980-), 男, 博士, 主要从事卫星光通信、信息光学等方面的研究。Email: yjjhit@163.com

## 0 引言

衍射光学元件(Diffractive Optical Element, DOE)是光学领域中的新兴分支,它是一种以光波的衍射为其工作原理,通过计算机设计波面相位,并借助微电子加工工艺制成的一类片基表面深度为亚微米的纯相位器件<sup>[1-3]</sup>。与传统的折反射元件相比,DOE 因其能实现许多传统光学难以实现的功能和目的,吸引了光学和其他相关领域专家的关注。随着计算机精密设计和微电子加工工艺的高速发展,DOE 已在世界范围内形成研究热潮<sup>[4-11]</sup>。

DOE 的设计通常是一种振幅-相位恢复过程,即由入射光平面和目标平面上的已知振幅信息,高精度地恢复位于入射平面的 DOE 的浮雕型相位结构,使入射光束经其调制后,能在目标平面得到所需衍射图样。由于这类逆衍射问题一般不存在解析解,因此通常转化为数值优化问题,即探寻其最优解的过程。

用于解决该优化问题的算法有很多种<sup>[12-19]</sup>,通常可分为全局搜索算法、局部搜索算法及全局/局部联合搜索算法等三大类。全局搜索算法能在完整空间内搜索各个极值点,得到最优解,包括模拟退火算法<sup>[15]</sup>、遗传算法<sup>[16]</sup>等。但是,全局优化算法的计算量巨大,且因其为随机搜索而带有一定的盲目性,其所设计的相位起伏较大从而导致工艺制作的极大困难,这些都极大地降低了全局优化方案的实际意义。相比之下,局部寻优方案具有较快的收敛速度,且能得到更有利于加工的相位分布,但对于一个变量很多、表征函数有多个极小值的情况,局部寻优很可能收敛于局部极值,无法得到最优解,局部搜索算法包括 Gerchberg-Saxton(GS)算法<sup>[12]</sup>、输入-输出法<sup>[13]</sup>、杨-顾算法<sup>[14]</sup>等。全局-局部搜索算法则融合了两者的一些优点,能以小于全局算法的计算量获得优于局部算法的设计结果,如全局/局部联合搜索算法等<sup>[17]</sup>。

为使 DOE 设计算法能相对快速地获得较高的计算精度,并具备跳离“局部极值”的能力,文中在 GS 算法的基础上,以复振幅每次迭代的相位与上次相位的加权和为驱动函数,以计算图样和目标图样在输入面上各采样点的振幅比较作为相位是否改变的判决条件,尝试改进 GS 算法。文中以光束整形应用为例,分

别采用 GS 算法和改进 GS 算法计算了 DOE 的相位分布函数,并对设计结果作了定量比较。

## 1 改进的 GS 算法

模拟退火算法和遗传算法等全局搜索算法计算费时且过程复杂,为降低计算复杂度并保证较高的计算精度,研究基于局部搜索的算法及其改进在许多应用中具有重要意义。

### 1.1 GS 算法

GS 算法是典型的 DOE 设计算法,属局部搜索算法,它依赖于输入面和输出面之间存在的傅里叶变换关系,通过在空域(输入面)和频域(输出面)内引入振幅限制,同时保留相位因子,经反复迭代后在输出面得到满意的振幅分布。

GS 算法的计算流程如图 1 所示,可描述为:首先,以初始相位  $\varphi_0$  和已知输入面光场的振幅分布 **A** 开始,作傅里叶变换(FFT);接着引入输出面(焦平面)限制条件,即以已知或要求的振幅分布 **B** 替代原振幅部分 **B'**,同时保持相位  $\psi'$  不变,作  $\text{FFT}^{-1}$ (傅里叶逆变换);然后对结果作输入面光场限制,即以已知输入光场的振幅分布 **A** 取代其振幅部分 **A'**,仍保持相位  $\varphi'$  不变,再作 FFT;……,如此循环直至结果满意。

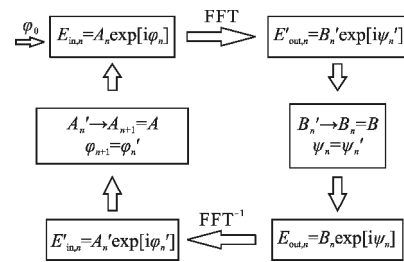


图 1 GS 算法流程

Fig.1 Flow chart of GS algorithm

GS 算法具有较好的设计灵活性和较高的计算收敛效率,但其对计算的初始值非常敏感,易陷入局部极小值,情况严重时甚至将陷入收敛的停滞区。产生这种情况的主要原因是计算幅值与限制幅值的失配问题。由于 GS 算法通常采用常数或随机数作为迭代计算的初始相位,将该相位与入射到 DOE 上的已知振幅信息组合后进行傅里叶变换,得到的输出振幅在一般情况下是不可能恰为目标振幅的,因此产生了这种模值不对应的矛盾。其次,因加工需要,

DOE 的相位函数将被量化处理,由此引入的量化误差也是造成模值失配的主要原因。由于 GS 算法为局部搜索算法,以上这些原因都可能造成算法收敛变慢或陷于局部极值,导致算法应用的局限性。

### 1.2 改进 GS 算法

为提高 GS 算法的相位重构精度,文中通过初始相位  $\varphi_0$  以及每次循环计算开始所用初相位  $\varphi_{n+1}$  的优化选择,进行 GS 算法的改进设计。

改进 GS 算法的工作流程如图 2 所示,其参量可参考图 1。与 GS 算法不同的是,当光束变换相对

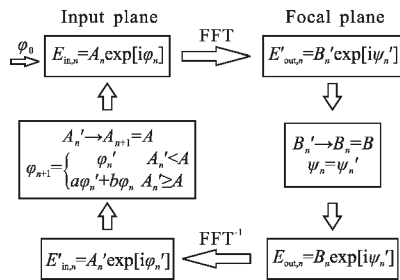


图 2 改进 GS 算法流程

Fig.2 Flow chart of improved GS algorithm

简单时,改进 GS 算法采用几何光学方法计算所得的相位函数<sup>[20]</sup>作为计算开始的初始相位  $\varphi_0$ ,以减小幅值失配对算张的不利影响。同时,为使算法具有一定的局部极值跳离能力,并考虑到相位因子在相位恢复问题中的重要性,参考文献[18-19]中引入的相位扰动方式,以复振幅每次迭代的相位与上次相位的加权和为驱动函数,对 GS 算法中每次迭代循环的初始相位做如下调整:

$$\varphi_{n+1} = \begin{cases} \varphi_n' & A_n' < A \\ a\varphi_n' + b\varphi_n & A_n' \geq A \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $a$  和  $b$  为相位因子的加权系数,其值与具体的光束变换要求相关。公式(1)表明,对于输入面上的每个采样点,在每次迭代循环结束时,均需比较其返回振幅  $A_n'$  和理想振幅  $A$ 。当某采样点的返回振幅小于相应的理想振幅时,采用返回相位  $\varphi_n'$  作为下次迭代的初始相位;而当采样点的返回振幅不小于相应理想振幅时,则采用上次迭代开始的初始相位  $\varphi_n$  和迭代结束得到的相位  $\varphi_n'$  的加权和作为下次迭代的初始相位  $\varphi_{n+1}$ 。改进 GS 算法以振幅比较结果为判据,调整下一次迭代开始的初始相位,其目的就是引入相位微扰,避免算法过早陷入局部极小值。

## 2 数值模拟

下面以光束整形应用为例,检验改进 GS 算法的特性,并与 GS 算法的设计结果作对比分析。为定量描述衍射光学光束整形元件相位函数解的逼近程度,引入如下三个性能参数:

均方差 MSE (Mean Square Error):

$$MSE = \frac{\sum_i^{\text{total}} |U_{\text{real}}^{(i)} - U_{\text{ideal}}^{(i)}|^2}{\sum_i^{\text{total}} |U_{\text{ideal}}^{(i)}|^2} \quad (2)$$

式中:  $U_{\text{real}}^{(i)}$  代表实际输出振幅的第  $i$  个取样点,  $U_{\text{ideal}}^{(i)}$  代表理想输出振幅的第  $i$  个取样点,因此 MSE 表示输出面全场范围内实际波前与理想波前的差别。

光能利用率为:

$$\eta_E = \frac{\sum_{m=-M/2}^{M/2-1} I(m)}{\sum_{\forall m} I(m)} \quad (3)$$

顶部不均匀性为:

$$RMS = \frac{1}{M-1} \sqrt{\sum_{m=-M/2}^{M/2-1} \left[ \frac{I(m) - \bar{I}}{\bar{I}} \right]^2} \quad (4)$$

式中:  $I(m)$  代表目标光采样点的光强;  $\bar{I} = \frac{1}{M} \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} I(m)$ ,  $m = -M/2, \dots, 0, 1, 2, 3, \dots, M/2-1$  为光束整形区域,顶部不均匀性适合描述均匀分布光束。

### 2.1 高斯到均匀

首先,考察高斯分布变换成均匀分布的情况,这种光束变换通常在激光材料加工、惯性点火装置等应用中起重要作用。

假设输入光束为垂直入射于 DOE 的单色平面波,其振幅分布为高斯分布:

$$A(r) = \exp(-r^2/w^2) \quad (5)$$

目标振幅则为以巴特沃斯分布近似的均匀分布:

$$B(r_2) = \left[ 1 + \left( \frac{r_2}{w_c} \right)^{2N} \right]^{-1/2} \quad (6)$$

式中:  $N$  为相应低通滤波器的阶数;  $w_c$  为低通截止频率。

为简单起见,仅考虑一维情况,其结果很容易推广至二维情况。当变换光束具有圆对称性质时,在极坐标系下用零阶汉克尔变换作变换核将使计算大为简化。

由于改进的 GS 算法中相位因子加权系数  $a$  和  $b$  与实际光束变换要求相关。因此,当采用改进 GS 算法设计具体 DOE 时,需首先确定  $a$  和  $b$ 。文中选择在区间  $[-5, 5]$  内以 0.1 的间隔枚举  $a$  和  $b$  进行迭代仿真,迭代次数以算法收敛为准(考虑实际计算时间,取迭代次数为 5 000 次),最终得到加权系数与 MSE 的关系如图 3 所示。

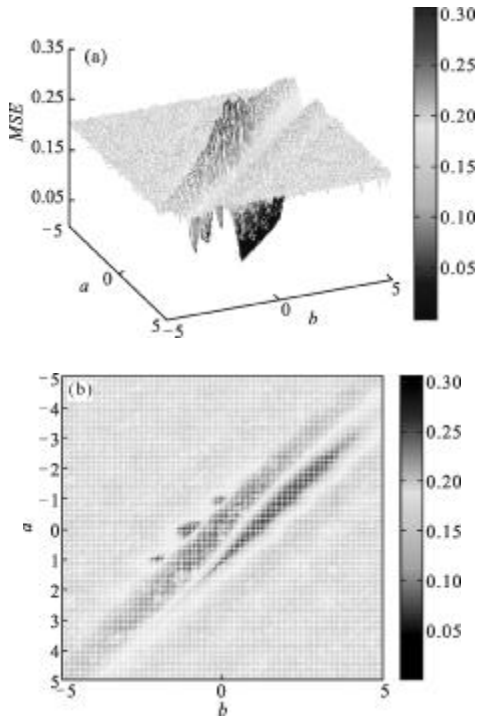


图 3 加权系数  $a$  和  $b$  与 MSE 的关系

Fig.3 MSE vs different weighted conic  $a$  and  $b$

由图 3 可知, MSE 随  $a, b$  的变化呈现出一个谷带,三个波谷,和一个峰带。谷带基本对应于  $a+b=1$  的直线,三个波谷位于  $a+b=-1$  的直线上,而峰带则位于  $a+b=0$  的直线上。改变迭代次数,这些峰谷特征基本不变。虽然 MSE 峰、谷产生的物理机理还有待于进一步深入研究,但不可否认的是,这依然对加权系数  $a$  和  $b$  的优化选择具有重要的参考意义。在图 3 的基础上,以  $a+b=1$  为限定条件,适当增加迭代次数,最终获得加权系数的优化值分别为  $a=0.7, b=0.3$ 。

采用 GS 算法和改进 GS 算法分别计算实现高斯分布到均匀分布的 DOE 的相位函数,当算法收敛时,目标平面的衍射光强分布如图 4 所示,由图可知,无论是 GS 算法还是改进 GS 算法,都很好地实

现了光束变换要求,其中后者计算得到的光强分布与目标强度分布几乎完全重合。

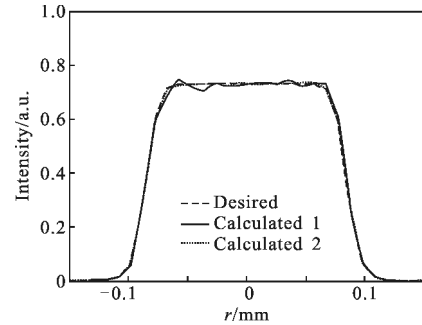


图 4 焦平面光强分布

Fig.4 Intensity patterns of focal plane

为进一步说明改进 GS 算法的收敛特性,分别计算算法收敛时相应的均方差 MSE、顶部不均匀性和光能利用率等指标,计算结果如表 1 所示。

表 1 算法改进前后的设计结果  
Tab.1 Optimization results for DOE by GS algorithm and improved GS algorithm

	MSE	RMS	$\eta_E$
GS algorithm	$1.84 \times 10^{-4}$	0.57%	99.63%
Improved GS algorithm	$5.14 \times 10^{-7}$	0.23%	99.69%

比较算法改进前后的设计结果,可以得到以下结果:算法改进后极限均方差由  $10^{-4}$  提高到  $10^{-7}$ ,提升效果明显,如图 5 所示;顶部不均匀性(即光强重构值与目标值的偏差)提高了 1.5 倍,如图 6 所示;而两者的光能利用率均很高,分别为 99.63% 和 99.69%。

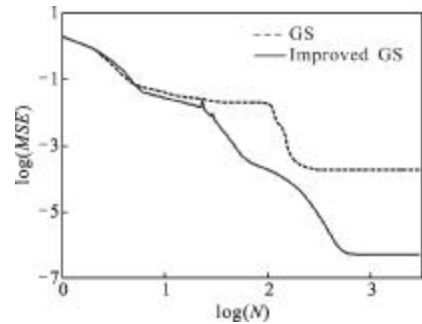


图 5 MSE 随迭代次数的变化

Fig.5 MSE vs iterative number

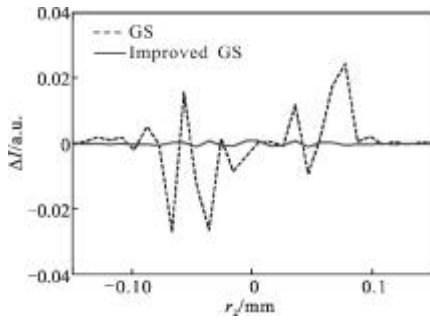


图 6 光强重构值与目标值的偏差

Fig.6 Intensity deviation between reconstruction and target values

图 7 描绘了利用以上两种算法计算得到的 DOE 的相位函数,由图可知,两者具有相同的变化规律,差别细微,但正是这种相位上的细微差别却导致生成的衍射图样具有不同的重构精度。确定 DOE 的相位形式后,便可对其进行量化处理,并通过制版设备图形发生器或光束直写设备产生二元或连续的振幅型掩模,最后通过光刻和离子蚀刻方法将设计的相位浮雕转移到光学基片上,最终形成台阶型或连续型纯相位 DOE。

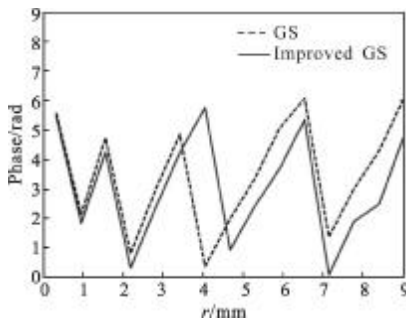


图 7 DOE 的相位分布

Fig.7 Phase patterns of DOE

### 2.2 高斯到环

下面考察将高斯光束变换为环光束的情况,其中焦平面的理想振幅分布表示为:

$$B(r_2) = \exp\left(-\frac{(r_2+d)^2}{w_2^2}\right) + \exp\left(-\frac{(r_2-d)^2}{w_2^2}\right) \quad (7)$$

式中:  $w_2$  为圆环横截面高斯分布的束腰;  $d$  为环到中心光轴的距离。

采用改进 GS 算法进行计算时,仍需参考 2.1 节,先确定相位因子的加权系数  $a$  和  $b$ ,经计算得相位加权系数的优化值分别为  $a=1.6, b=-0.6$ 。当算法收敛时,两种算法计算获得的焦平面光强分布如图 8 所示,可见 DOE 成功地完成了高斯分布到环分布的转换。

对图 8 中的两种分布作进一步分析,得到 GS 算法和改进 GS 算法的计算光强与理想光强间差值的对比关系如图 9 所示,由图可明显看出,利用改进 GS 算法得到的输出光强更接近理想值。在光能利用率指标上,两种算法分别为 97.88% 和 97.99%,改进 GS 算法的设计结果略高。

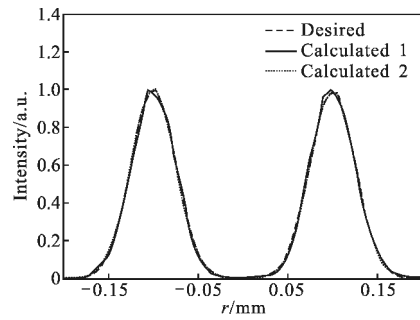


图 8 焦平面光强分布

Fig.8 Intensity patterns of focal plane

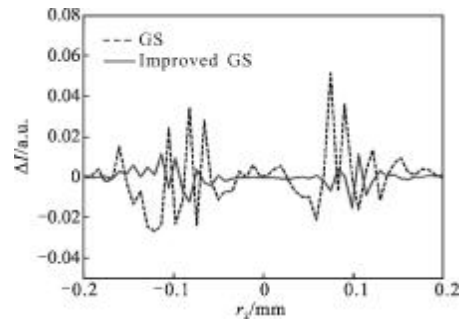


图 9 光强重构值与目标值的偏差

Fig.9 Intensity deviation between reconstruction and target values

图 10 则反映了 GS 算法和改进 GS 算法的 MSE 随迭代次数的变化规律,对比两者的收敛曲线可知,改进 GS 算法的极限收敛精度比 GS 算法高将一个数量级,相应的极限 MSE 分别为  $8.77 \times 10^{-4}$  和  $2.42 \times 10^{-5}$ 。研究改进 GS 算法的收敛曲线可知,改进

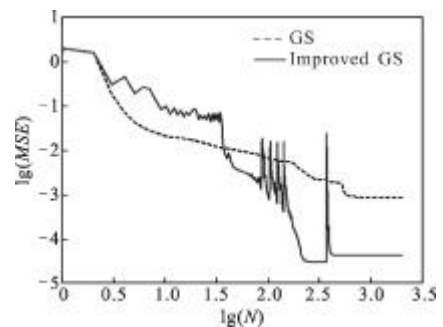


图 10 MSE 随迭代次数的变化

Fig.10 MSE vs iterative number

GS 算法的 MSE 并不是像 GS 算法那样随迭代次数的增加而逐渐减小,而是具有一定的振荡性,进一步比较图 5 和图 10 可知,目标衍射图样越复杂,该算法收敛曲线上的振荡次数越多,正是这种振荡性的存在使改进 GS 算法具有一定的“局部极值”跳离能力。

图 11 为两种算法收敛时的 DOE 相位图,图 11(a)为 GS 算法的计算结果,图 11(b)则由改进 GS 算法计算所得。利用该图所得的位相分布即可进行 DOE 的掩模设计,并完成实际加工。

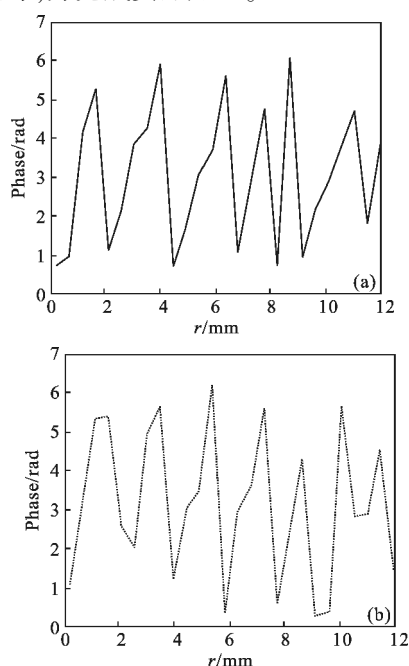


图 11 DOE 的相位分布

Fig.11 Phase patterns of DOE

### 3 结论

文中以复振幅每次迭代的相位与上次相位的加权和为驱动函数,改进了 GS 算法。并以光束整形 DOE 为例,对比了 GS 算法和改进 GS 算法的设计结果。仿真结果表明,改进 GS 算法在高斯分布到均匀分布,高斯分布到环分布的设计实例中,高精度地重构了所需的目标衍射图样,其重构精度和顶部不均匀性指标优于 GS 算法,对 DOE 的优化设计具有参考价值。

#### 参考文献:

[1] Veldkamp W B, McHugh T J. Binary optics [J]. Scientific American, 1992, 266(5): 92-97.

[2] Herzig H P. Micro Optics Elements, Systems and Applications[M]. London: Taylor & Francis Ltd, 1997.

[3] Jin Guofan, Yan Yingbai, Wu Minxian. Binary Optics [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1998. (in Chinese)

[4] Wang Zhaoqi. Recent progress of diffractive optics on ophthalmology [J]. Infrared and Laser Engineering, 2006, 35(S): 39-43. (in Chinese)

[5] Wen F J, Chung P S. 2D optical beam splitter using diffractive optical elements (DOE)[C]//SPIE, 63510U.

[6] Walsby E D, Alton J, Worrall C, et al. Achromatic diffractive lens written onto a liquid crystal display[J]. Opt Lett, 2007, 32(9): 1141-1143.

[7] Manela O, Mordechai S. Nonlinear diffractive optical elements[J]. Optics Express, 2007, 15(17): 10863-10868.

[8] Andrew J W, Adam J C, Mohammad R, et al. Beam shaping diffractive optical elements for high power laser applications [C]//SPIE, 2008, 7070: 70700H.

[9] Neiss E, Flury M, Fontaine J. Diffractive optical elements for laser marking applications[C]//SPIE, 2008, 7003: 70032L.

[10] Feng Di, Ou Pan, Feng Lishuang, et al. Binary sub-wavelength diffractive lenses with long focal depth and high transverse resolution[J]. Optics Express, 2008, 16(25): 20968-20973.

[11] Bai Yu, Xing Tingwen, Jiang Yadong, et al. Design of head-mounted display optical system with DOE [J]. Infrared and Laser Engineering, 2012, 41(10): 2753-2757. (in Chinese)

[12] Gerchberg R W, Saxton W. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane picture[J]. Optic, 1972, 35: 237-246.

[13] Fienup J R. Phase retrieval algorithms: a comparison [J]. Appl Opt, 1982, 21(15): 2758-2769.

[14] Yang Guozhen, Wang Li, Dong Bizhen, et al. On the amplitude-phase retrieval problem in an optical system involved non-unitary transformation[J]. Optic, 1987, 75(2): 68-74.

[15] Kirkpatrick S, Gelatt C D, Vecchi M P, et al. Optimization by simulated annealing[J]. Science, 1983, 220(4598): 671-679.

[16] Mahalb U, Shamir J, Caulfield H J. Genetic algorithm for optical pattern recognition[J]. Opt Lett, 1991, 16(9): 648-650.

[17] Zhai J H, Yan Y B, Jin G F, et al. Global/local united search algorithm for global optimization [J]. Optic, 1998, 108(4): 161-164.

[18] Deng X, Li Y, Qiu Y, et al. Phase-mixture algorithm applied to design of pure phase elements [J]. Chinese J Lasers, 1995, B4: 447-454.

[19] Liu Z, Liu S. Double image encryption based on iterative fractional Fourier transform [J]. Optics Communications, 2007, 275: 324-329. (in Chinese)

[20] Chen Yunliang. Research on the application of diffractive optics technology in intersatellite optical communication [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2005: 75-77. (in Chinese)