

## 星图分布对星敏感器最小二乘姿态精度的影响

张磊, 何昕, 魏仲慧, 梁国龙

(中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033)

**摘要:** 星敏感器的姿态确定是其导航最基本、最关键的环节。为了分析星图分布对最小二乘姿态测量精度的影响, 描述了星敏感器的姿态角定义, 研究了最小二乘法求解星敏感器姿态的过程, 并从数学角度推导了存在一定观测误差的情况下, 最小二乘方法产生较差姿态测量精度的部分主要原因, 即系数矩阵的条件数变化。最后以星图模拟的方式在不同条件下模拟了三组典型的星图分布, 对其进行姿态测量和结果统计。统计结果表明: 姿态测量精度除了受条件数描述的导航星间相对位置的影响外, 还与导航星组在星图中的不同位置以及不同的星敏感器参数模型有关。

**关键词:** 星图分布; 星敏感器; 最小二乘; 姿态测量精度

**中图分类号:** V249.32    **文献标志码:** A    **文章编号:** 1007-2276(2014)06-1836-06

## Impact analysis of star distribution on least square attitude measuring precision in star sensor

Zhang Lei, He Xin, Wei Zhonghui, Liang Guolong

(Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China)

**Abstract:** As the highest measurement precision attitude sensor, attitude determination is the most basic and critical section in navigation. To analyze the impact of star distribution on least square attitude measuring precision, the definition of the attitude angle was described, the problem-solving process by least square method was researched, and the condition number of the coefficient matrix, that leads to poor precision under a certain observational error, was derived from the view of mathematical. Lastly, three sets of typical star distribution under different conditions were simulated, calculate the results and conduct the statistics, the simulation results indicate that measurement precision is influenced by different locations of the star group in image and different device parameter models for star sensor, besides the relative position of the star group described by condition number.

**Key words:** star distribution; star sensor; least square; attitude measuring precision

收稿日期: 2013-10-07; 修订日期: 2013-11-09

基金项目: 中国科学院知识创新工程领域前沿项目

作者简介: 张磊(1982-), 男, 博士, 副研究员, 主要从事数字图像处理与光电测量方面的研究。Email: zlxrl@tom.com

## 0 引言

星敏器具有自主导航能力、高精度的特点<sup>[1]</sup>,随着其技术的发展,被广泛应用于陆、海、空、天各个领域<sup>[2-5]</sup>,其中,以航空、航天应用居多,为载体提供高精度的姿态信息。星敏器的工作流程主要包括星光探测、星点目标提取、星图识别和姿态确定几个步骤。姿态确定就是利用已知的星光矢量确定星敏器相对于地心惯性坐标系的三轴姿态角,然后根据星敏器在载体上的安装位置,进而得到载体在地心惯性坐标系的三轴姿态角。作为姿态导航部件,姿态确定过程是最基本、也是最关键的环节,它是进行所有导航任务的前提之一。

目前,基于单帧星图的姿态确定算法有多种<sup>[6]</sup>,最小二乘法求解姿态是一种比较典型、出现也比较早的算法,它以 TRIAD 算法为基础,经改进得到<sup>[7]</sup>。当导航星矢量不少于 3 颗时,就可以通过最小二乘法来确定星敏器的最佳姿态值,同时实现均差。采用最小二乘法求解姿态形式简单、计算量较小。

根据星敏器三轴姿态误差的评价公式<sup>[8]</sup>,偏航、俯仰误差受星敏器的单星提取误差影响,横滚角的误差在受单星提取误差影响的基础上还受星点分离角距影响,角距越小,误差越大。虽然可以通过增加参与计算姿态的星数目来提高姿态测量精度,但在采用最小二乘法确定星敏器姿态的实际应用中,星图分布也对姿态测量精度产生影响<sup>[9]</sup>。文中针

$$M_s = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\alpha\cos\delta - \cos\alpha\sin\delta\sin\kappa & -\sin\alpha\sin\delta - \cos\alpha\cos\delta\cos\kappa & -\cos\alpha\cos\delta \\ -\cos\alpha\cos\kappa - \sin\alpha\sin\delta\sin\kappa & \cos\alpha\sin\kappa - \sin\alpha\sin\delta\cos\kappa & -\sin\alpha\cos\delta \\ \cos\delta\sin\kappa & \cos\delta\cos\kappa & -\sin\delta \end{bmatrix} \quad (1)$$

则星敏器在地心惯性坐标系下的三轴姿态角为:

$$\alpha = \arctan(b_3/a_3)$$

$$\delta = \arcsin(-c_3)$$

$$\gamma = \arctan(c_1/c_2)$$

其中,  $\alpha, \kappa \in [0, 2\pi]$ ,  $\alpha, \kappa$  的象限分别由  $a_3, b_3$  和  $c_1, c_2$  来判断,  $\delta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 。

### 1.2 最小二乘姿态方程组

定义导航星矢量阵为  $V$  (不少于 3 颗), 观测矢量阵为  $W$ , 多矢量的姿态方程组可写为  $W^T = M_s V^T$ , 得到  $(V^T V)M_s = V^T W$ 。

对星敏器中以最小二乘法解姿态的测量精度进行研究, 对以最小二乘法计算姿态时产生较大误差的原因进行了分析, 并着重分析了存在单星提取误差时, 星图分布对姿态测量精度的影响。

## 1 星敏器最小二乘姿态计算方法

### 1.1 星敏器的姿态角定义

星敏器姿态角的定义如图 1 所示,  $O-XYZ$  为

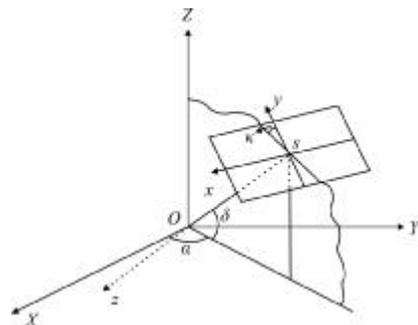


图 1 姿态角的定义

Fig.1 Definition of attitude angle

地心惯性坐标系,  $O$  为天球球心,  $X$  轴指向春分点,  $Z$  轴指向北天极。  $s-xyz$  为星敏器像空间坐标系, 坐标原点  $s$  为投影中心,  $x, y$  轴分别平行于 CCD 靶面的  $x, y$  轴,  $z$  轴负方向为星敏器视轴方向, 星敏器的姿态角由星敏器视轴指向的赤经  $\alpha$ 、赤纬  $\delta$  以及像平面的旋转角(即横滚角)  $\kappa$  组成。由地心惯性坐标系到星敏器坐标系的旋转矩阵按 3-1-3 转序得公式(1)。

其中,

$$V = (L_i, M_i, N_i) = (\cos\alpha_i \cos\delta_i, \sin\alpha_i \cos\delta_i, \sin\delta_i)$$

$$W = \frac{1}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + f^2}} (x_i \ y_i \ -f)$$

$$V^T = \begin{bmatrix} L_i \\ M_i \\ N_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_i \cos\delta_i \\ \sin\alpha_i \cos\delta_i \\ \sin\delta_i \end{bmatrix}$$

式中:  $(\alpha_i, \delta_i)$  为导航星在地心惯性坐标系中的赤经、赤纬坐标。

$$V^T V = \begin{pmatrix} \sum_1^n L_i^2 & \sum_1^n L_i M_i & \sum_1^n L_i N_i \\ \sum_1^n L_i M_i & \sum_1^n M_i^2 & \sum_1^n M_i N_i \\ \sum_1^n L_i N_i & \sum_1^n M_i N_i & \sum_1^n N_i^2 \end{pmatrix}$$

而  $M_s$  即为地心惯性坐标系到星敏感器的姿态转换矩阵。

$$\text{假设 } M_s = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \text{ 多矢量方程组可以写为}$$

公式(2)的形式<sup>[10]</sup>:

$$\begin{pmatrix} \sum_1^n L_i^2 & \sum_1^n L_i M_i & \sum_1^n L_i N_i \\ \sum_1^n L_i M_i & \sum_1^n M_i^2 & \sum_1^n M_i N_i \\ \sum_1^n L_i N_i & \sum_1^n M_i N_i & \sum_1^n N_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_1^n \frac{L_i x_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + f^2}} & \sum_1^n \frac{L_i y_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + f^2}} & \sum_1^n \frac{-L_i f}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + f^2}} \\ \sum_1^n \frac{M_i x_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + f^2}} & \sum_1^n \frac{M_i y_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + f^2}} & \sum_1^n \frac{-M_i f}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + f^2}} \\ \sum_1^n \frac{N_i x_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + f^2}} & \sum_1^n \frac{N_i y_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + f^2}} & \sum_1^n \frac{-N_i f}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + f^2}} \end{pmatrix} \quad (2)$$

### 1.3 最小二乘方法误差分析

姿态方程组  $(V^T V)M_s = V^T W$  为典型的线性方程组  $Ax = b$  的形式<sup>[11]</sup>。系数矩阵  $A$  由导航星矢量阵  $(V^T V)$  构成,认为是精确的,且为非奇异阵,假设  $b$  存在测量误差,即存在单星提取误差,分析单星提取误差  $\Delta b$  对姿态转换矩阵  $x$  的影响,见公式(3)、(4)、(5)。

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b \Rightarrow \Delta x = A^{-1} \Delta b \quad (3)$$

$$Ax = b \Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|} \quad (4)$$

由公式(3)、(4)可得公式(5):

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \quad (5)$$

式中:  $\Delta b$  为单星提取误差;  $\Delta x$  为姿态转换矩阵的误差;  $\|A\|$  为系数矩阵的 2 范数;  $\|A^{-1}\|$  为系数矩阵逆的 2 范数。

从上式可以看出,当方程组的右端项  $b$  受到扰动  $\Delta b$  时,引起的解的相对误差完全由  $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$  (即系数矩阵  $A$  的条件数  $\text{cond}(A)$ ) 来决定,它是判断矩阵病态与否的一种度量,刻画了方程组的解对测量数据的敏感或放大程度,表示矩阵计算对于误差的敏感性。 $\text{cond}(A)$  的大小反映了矩阵本身的性质,与所用的计算工具和计算方法无关。

对于线性方程组  $Ax = b$ ,  $\text{cond}(A)$  越大表示矩阵越病态,数值解的稳定性越差,  $b$  的微小改变就能引起解  $x$  较大的改变。反之,如果  $\text{cond}(A)$  小,  $b$  有微小的改变,  $x$  的改变也很微小,数值稳定性较好。

根据矩阵条件数的计算公式,需要计算矩阵  $(A^T A)^{-1}$  的最大、最小特征值,其比值的开方即为条件数  $\text{cond}(A)$ 。从公式(6)可以看出,如果一个特征值比其他特征值在数量级上小很多,  $x$  在对应特征向量方向上很大的移动才能产生  $b$  微小的变化,这就解释了为什么此时  $\text{cond}(A)$  大。

$$\text{cond}(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} \quad (6)$$

一个极端的例子:当  $A$  为奇异阵时,条件数为无穷大,这时即使不改变  $b$ ,  $x$  也可以改变。奇异的本质原因在于矩阵有 0 特征值,  $x$  在对应特征向量的方向上运动不改变  $Ax$  的值。

## 2 仿真试验

为了得到星图分布对星敏感器最小二乘姿态测量精度影响的直观结果,文中选择耶鲁亮星星表 (Bright Star Catalog) 中亮于 5 Mv 的恒星,根据表 1 中星敏感器的模型参数采用星图模拟的方式进行仿真试验<sup>[12]</sup>。星图分布共分三组,为了明显区分各星图分布对姿态测量精度的影响,测量中对每颗导航星的图像坐标随机加入最大 0.5 个像元的位置误差来模拟单星提取误差,并对同一星图分布进行  $N=100$  次的随机姿态测量。

表 1 星敏感器模型参数

Tab.1 Model parameters of star sensor

Item	Parameter 1	Parameter 2
Focus/mm	30	90
Image resolution	1 000×1 000	1 000×1 000
Pixel area resolution/(°)	54.7	18.3

第一组星图分布如图 2、图 3 所示,为 5 幅根据星敏传感器三轴姿态角(61°, 49°, 180°)和模型参数 1 模拟的星图分布,其中,图 2 为原始星图,图 3(a)~图 3(d)是基于图 2 所选的几种典型星图分布,姿态测量统计结果见表 2。

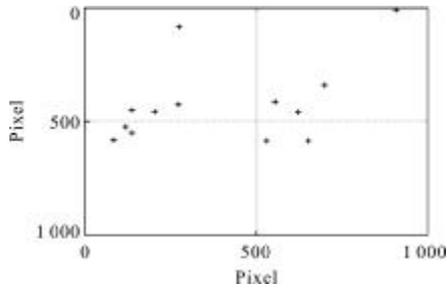


图 2 模拟星图

Fig.2 Simulated star image

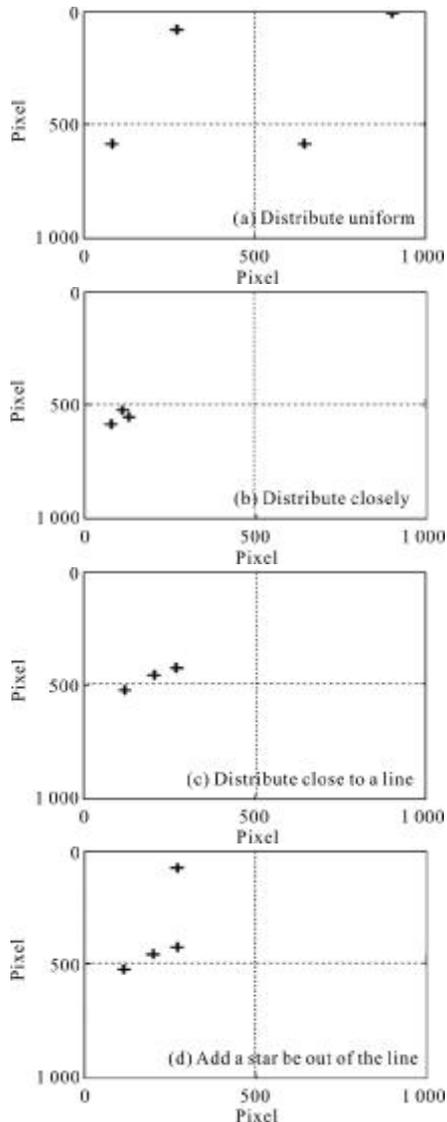


图 3 星图分布 1

Fig.3 Star image distribution 1

表 2 统计结果 1

Tab.2 Statistical result 1

Fig.	Condition number of coefficient matrix	Std/(")		
		Yaw	Pitch	Roll
Fig.2	$6.173 \times 10^2$	10.3	11.6	114.1
Fig.3(a)	$2.837 \times 10^2$	18.5	14.4	127.3
Fig.3(b)	$8.65166 \times 10^4$	357.1	223.9	2154.3
Fig.3(c)	$6.774234 \times 10^5$	488.7	549.5	6738.4
Fig.3(d)	$7.0499 \times 10^3$	89.7	27.2	280.1

表 2 的统计结果显示,当参与计算姿态的导航星均匀分布于图像四个象限时,系数矩阵条件数较小,姿态测量误差较小,导航星分布较近的情况次之,导航星分布近似直线时最为严重,系数矩阵条件数最大,姿态测量误差最大。如果在导航星分布近似直线时,加入一颗不在直线上的导航星,条件数降低,姿态测量误差也得到明显的改善。

由该组星图分布的统计结果,图 3(a)~(d)说明星图中导航星的分布确实影响着系数矩阵的条件数大小,从而影响姿态测量精度。在计算姿态时,如图 3(c)~(d)所示,通过增加参与计算的星数目可以改善系数矩阵的条件数,进而提高姿态测量精度,但如果星图分布改变不大,如图 2、图 3(a)所示,即条件数值相近时,增加参与计算姿态的导航星数量对姿态测量精度的改善并不大。

小幅度改变星敏传感器的视轴指向,使部分选择的星图分布依然能够出现在视场中,得到第二组星图分布。如图 4(a)~(c)所示为 3 幅根据星敏传感器三轴姿态角(52°, 49°, 180°)和模型参数 1 模拟的星图分布,其中,图 4(a)对应于图 3(b)的星图分布,图 4(b)对应于图 3(c),图 4(c)对应于图 3(d),图 4(a)~(c)的姿态测量统计结果见表 3。

表 3 统计结果 2

Tab.3 Statistical result 2

Fig.	Condition number of coefficient matrix	Std/(")		
		Yaw	Pitch	Roll
Fig.4(a)	$8.65166 \times 10^4$	32.1	14.7	2114.9
Fig.4(b)	$6.774234 \times 10^5$	168.2	198.3	5902.6
Fig.4(c)	$7.0499 \times 10^3$	36.8	25.2	278.1

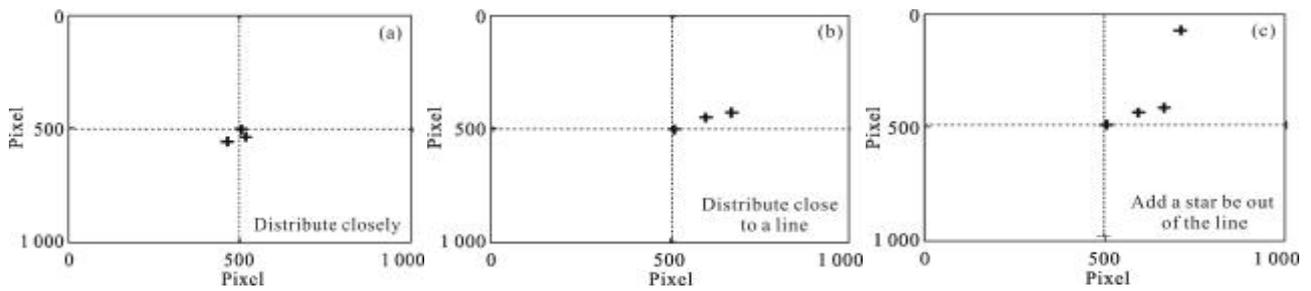


图 4 星图分布 2

Fig.4 Star image distribution 2

对比第一组星图分布，导航星在第二组星图分布中均向视场中心靠近，相同导航星的星图分布、系数矩阵条件数不变，但由表 2 与表 3 中的姿态测量统计结果显示，同一组导航星姿态测量得到的偏航角、俯仰角均有明显的改善，横滚角改善不明显。所以，应尽量选择位于视场中心区域的导航星，或者提高位于视场中心区域的导航星权值，以提高姿态测量精度。

第三组星图分布是在星敏传感器模型参数发生改变时(例如表 1 中的模型参数 2)，根据星敏传感器三轴姿态角(52°, 49°, 180°)得到图 5(a)~(b)，姿态测量统计结果见表 4。

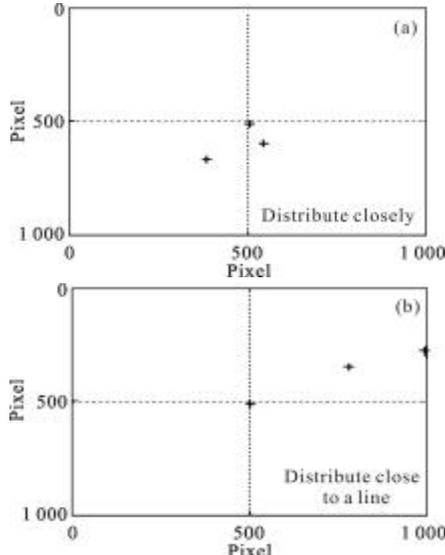


图 5 星图分布 3

Fig.5 Star image distribution 3

表 4 统计结果 3

Tab.4 Statistical result 3

Fig.	Condition number of coefficient matrix	Std/(°)		
		Yaw	Pitch	Roll
Fig.5(a)	865 166×10 <sup>4</sup>	12.7	4.6	692.5
Fig.5(b)	677 423 4×10 <sup>5</sup>	56.3	67.2	2 191.3

对比表 3 与表 4 的统计结果，在系数矩阵条件数相同的情况下，因为星敏传感器模型参数中焦距的加长提高了像元的空间角分辨率，使姿态测量精度得到同步提高。

### 3 结论

最小二乘法是在均方差最小意义下得到一组数据最佳结果的方法，由于应用在星敏传感器姿态计算中是解线性方程组的形式，存在矩阵求逆运算，当导航星分布相关性较强时，如近似直线或相距较近的星图分布，系数矩阵条件数较大，方程组病态性较严重，此时姿态测量精度较低。

但系数矩阵的条件数仅可以用于评价导航星间的位置关系，无法评判导航星组在星图中的位置，且对于不同的星敏传感器参数模型，条件数与测量精度的对应关系也会发生变化。所以，以星图分布中系数矩阵条件数来判断星敏传感器最小二乘姿态测量精度，还需要同时考虑星敏传感器模型参数以及是否同一天区两个条件。

### 参考文献:

- [1] Qiao Peiyu, He Xin, Wei Zhonghui, et al. Calibration of high -accuracy star sensor [J]. Infrared and Laser Engineering, 2012, 41(10): 2779-2784. (in Chinese)
- [2] Thomas P C, Gangan Prathap, Rao V K, et al. Star tracker for remote sensing satellites [J]. Acquisition, Tracking, and Pointing VIII, 1994, 7: 169-178.
- [3] Orfiz Gerardo G, Lee Shinhak. Star tracker based ATP system conceptual design and pointing accuracy estimation [J]. Free-Space Laser Communication Technologies XVIII, 2006, 3: 6105D-1-6105D-10.
- [4] Ma Jun. Research of jumbo jet synthesis navigation algorithm [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2008. (in Chinese)

- [5] Guo Jingming. Study on ship attitude measurement based on star sensor [D]. Beijing: University of Chinese Academy of Sciences, 2013. (in Chinese)
- [6] Markley F L. Attitude determination using vector observations and the singular value decomposition [J]. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 1988, 36(3): 245-258.
- [7] Shuster M D, OH S D. Three -axis determination from vector observation [J]. *Journal of Guidance and Control*, 1981, 4(1): 70-77.
- [8] Carl Christian Liebe. Star trackers for attitude determination [J]. *AES System Magazine*, 1995, 7: 10-16.
- [9] Wei Xinguo, Zhang Guangjun, Fan Qiaoyun, et al. Ground function test method of star sensor using simulated sky image [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2008, 37(6): 1087-1091. (in Chinese)
- [10] Zheng Wanbo. Full sky autonomous layered star identification algorithm research based on star sensor [D]. Beijing: University of Chinese Academy of Sciences, 2003. (in Chinese)
- [11] Cheng Yunpeng, Zhang Kaiyuan, Xu Zhong. Matrix Theory [M]. Xi' an: Northwestern Polytechnical University Press, 2000. (in Chinese)
- [12] Ouyang Hua. Research on star image simulation and star extraction method for CCD' s star tracker [D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2005. (in Chinese)