

超快光纤激光器中的周期分岔研究进展(特邀)

赵鹭明, 束朝杰, 王郁飞, 李 雷

(江苏师范大学 物理与电子工程学院 江苏省先进激光技术与新兴产业协同创新中心
江苏省先进激光材料与器件重点实验室, 江苏 徐州 221116)

摘 要: 超快光纤激光器已成为超短脉冲光源的理想选择对象并得到实际应用。由于光束直径受限于光纤截面及光与光纤的长相互作用距离, 非线性效应不可避免。在非线形效应导致的脉冲分裂出现之前, 在合适的条件下超快光纤激光器可以实现输出的周期分岔。周期分岔是指输出脉冲的参数以腔长的倍数为固定周期重复出现。周期分岔是非线性系统的本征特性之一, 广泛存在于所有非线性系统中。文中对超快光纤激光器中的周期分岔的研究进展进行了详细综述, 重点分析了不同色散区间周期分岔的表征特性, 并对矢量孤子的周期分岔特性, 以及多脉冲情况下的周期分岔特性进行讨论。

关键词: 周期分岔; 超快光纤激光器; 非线性效应

中图分类号: O436 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3788/IRLA201847.0803002

Research progress of period doubling bifurcation in ultrafast fiber lasers (*invited*)

Zhao Luming, Shu Chaojie, Wang Yufei, Li Lei

(Jiangsu Key Laboratory of Advanced Laser Materials and Devices, Jiangsu Collaborative Innovation Center of
Advanced Laser Technology and Emerging Industry, School of Physics and Electronic Engineering,
Jiangsu Normal University, Xuzhou 221116, China)

Abstract: Ultrafast fiber lasers have become the ideal candidate for ultrafast light source and been applied in practice. Due to the small beam diameter and the long interaction distance between light and fibers, the nonlinear effect is unavoidable. Before the appearance of multiple pulses resulted from the excessive nonlinear effect, the phenomenon of period doubling bifurcation (PDB) can be observed in ultrafast fiber lasers under appropriate operation conditions. The PDB refers to the recurrence of pulse parameters at the rate of times of cavity transmission time. The PDB is the intrinsic features of nonlinear systems. It is universal among different nonlinear systems. The latest research progress of the PDB in ultrafast fiber lasers was summarized. The characteristics of the PDB in different dispersion regimes were analyzed. In addition, the features of the PDB of vector solitons, and that of multiple pulses were discussed.

Key words: period doubling bifurcation; ultrafast fiber lasers; nonlinear effect

收稿日期: 2018-04-17; 修订日期: 2018-05-15

基金项目: 江苏省高等学校自然科学研究重大项目(17KJA416004); 国家自然科学基金(11674133);

江苏高校优势学科建设工程资助项目(PAPD); 江苏省研究生科研与实践创新计划(KYCX17_1653, KYCX17_1655)

作者简介: 赵鹭明(1976-), 男, 教授, 博士, 主要从事锁模光纤激光器、光纤放大器、光孤子动力学等方面的研究。

Email: zhaoluming@jsnu.edu.cn

0 引言

周期分岔是非线性系统中普遍存在的一种稳定状态。在数学研究中,分立的动态系统存在周期性的稳定状态。周期分岔是指系统方程的某一参数的微小变化所导致的系统状态以原系统周期的整数倍重复出现。即系统需要重复原来循环迭代次数的整数倍才能复现原有数值。在物理研究中,周期分岔过程是混沌理论的一个重要概念。周期分岔过程是一条通向混沌的典型道路。由周期分岔通向混沌的例子最早由生物学家 Robert May 在 1976 年提出^[1]。后续的研究发现周期分岔现象广泛存在于非线性系统中。Lee 等人发现在直接调控的半导体激光器中,当入射电流的调控频率和激光器的弛豫振荡频率接近时,在电流调制指数增加时激光器可以呈现周期分岔到混沌现象^[2]。Courtney 等人在连续 Stark 光谱中观察到封闭经典轨道的分岔现象^[3]。通过改变二维流体中的雷诺数,Braun 等人在外部驱动的二维流体中观察到周期分岔到混沌现象^[4]。周期分岔的研究对我们理解非线性系统的性质十分重要,特别是对非线性系统的稳定性分析需要排除周期分岔的出现,而对周期分岔点的参数研究则可应用于微小信号探测^[5]。

激光器作为非线性系统的典型代表,有关周期分岔现象的研究一直是研究热点^[2,6-10]。Lamela 等人首次在直接调控的半导体激光器中观察到周期三和混沌状态的存在^[6]。周期分岔可以基于周期的不同倍数,譬如周期三、周期四、周期五等等。也就是说,在同一参数条件下,系统在多个稳定态之间周期性跳跃。光纤激光器的主体为光纤,光束被约束在光纤中进行传播,光与光纤的作用距离较长,因此非线性效应十分明显。在超快光纤激光器中,由于超短脉冲的高峰值功率,使得非线性效应得到进一步加强。再加上超快光纤激光器的结构比较简单,参数易于操控,因此超快光纤激光器是研究周期分岔现象的理想平台。

文中介绍超快光纤激光器中周期分岔的研究进展,重点分析了不同色散区间周期分岔的表征特性,并对矢量孤子的周期分岔特性,以及多脉冲情况下的周期分岔特性进行讨论。对周期分岔可能的应用方向进行了展望。

1 周期分岔的表征

Sucha 等人首次在附加脉冲锁模(additive-pulse mode-locking)激光器中观察到周期现象,通过对激光器系统的数值模拟,他们得到周期分岔到混沌的演化图^[7]。数值模拟表明:在特定参数条件下,随着腔内光纤非线性的增加,激光器从 CW 背景演变为稳定的锁模脉冲,进而演变为周期分岔,直至混沌。周期分岔可以在很大的参数范围内存在。光纤激光器中的周期分岔则首先由 Tamura 等人报道^[8]。通过在孤子光纤激光器中引入带通滤波器,Tamura 等人实现了对孤子中心波长的调节,在波长调节过程中,周期二和周期三可以出现。通过降低泵浦功率,周期二或周期三现象可以得到抑制,激光器重新回到周期一状态。

首次在色散管理的光纤激光器中观测到周期分岔现象并对其进行了实验表征^[9]。周期分岔现象实际上是指随着激光器腔内非线性效应的增强,激光器产生的脉冲参数从原来的以腔长为重复周期转变为以腔长的整数倍为重复周期。对光纤激光器中产生的脉冲进行测量主要涉及四个方面:光谱(光谱仪);脉冲序列(示波器);自相关曲线(自相关仪);RF 谱(RF 谱仪)。测量原理为多个脉冲的平均所对应的物理参数测量是不适合表征周期现象的,譬如光谱测量和自相关曲线测量。当使用分辨率足够高的测量系统时,从脉冲序列是可以区别出周期一和周期分岔现象的。图 1(a)显示的是输出脉冲序列呈现周期

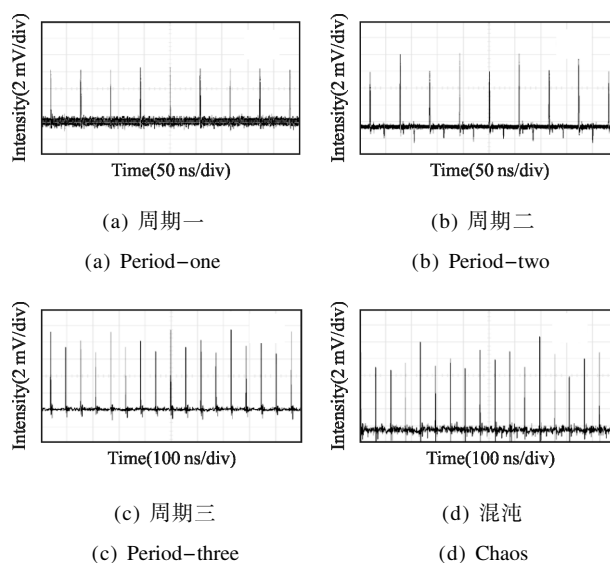


图 1 周期现象示例

Fig.1 Example of period phenomena

一时所对应的示波器测量结果；随着泵浦功率的提高,脉冲序列以腔长的两倍为周期呈现,即周期二,如图 1(b)所示;继续增加泵浦功率,脉冲序列以腔长的四倍为周期呈现,即周期四,如图 1(c)所示;继续增加泵浦,脉冲的强度在一定范围内随机出现,即混沌,如图 1(d)所示^[9]。使用高分辨率测量系统,譬如 40 GHz 的光电探测器组合 50 GHz 的采样示波器,可以测出周期二对应的前后两个脉冲的包络的不同,如图 2 所示。

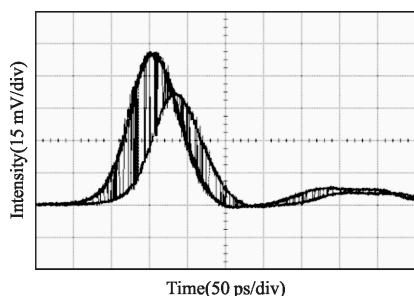


图 2 周期二状态的示波器测量结果

Fig.2 Oscilloscope traces of a period-two state of the laser emission

通过测量脉冲序列的 RF 谱,可以直接得出周期分岔的相关信息。如图 3(a)所示,当激光器处于周期一状态时,RF 测量结果显示与激光器基本重复频率匹配的 1 阶信号及高次谐波;当激光器处于周期二状态时,RF 测量结果除了显示与激光器基本重复频率匹配的 1 阶信号及高次谐波外,还会在激光器基本重复频率一半的位置(对应周期二)上出现信号及其高次谐波,如图 3(b)所示。

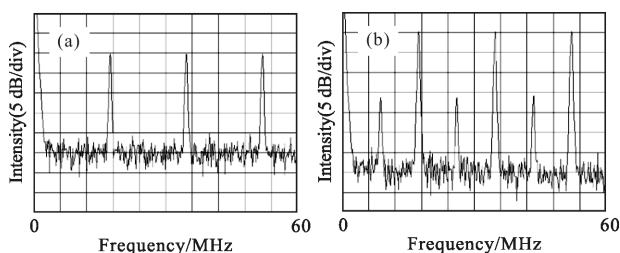


图 3 周期二状态的 RF 测量结果

Fig.3 RF spectra of the laser output corresponding to (a) period-one; (b) period-two states

在超快光纤激光器中,随着泵浦能量的提高,在脉冲分裂发生之前脉冲能量是逐渐提升的^[11],但只要状态稳定,对应的测量光谱即便是平均的,也可以表征单个脉冲的光谱特征。对周期二状态的光谱测

量结果表明周期二状态所对应的光谱测量结果不同于周期一状态所对应的光谱^[9],说明周期二对应的在激光器腔内同一位置前后两次出现的脉冲参数完全不同,因此实验过程中的光谱测量结果是对两种稳定脉冲光谱的平均。

自相关仪在进行自相关曲线测量时,因光纤激光器的重复频率远高于自相关仪的扫描频率,一般是对多个脉冲进行平均,因此自相关曲线反馈不出周期分岔的特性。

2 工作在不同色散区的周期分岔

超快光纤激光器最早工作于反常色散区域^[12],这是因为反常色散区是传统孤子的形成区域,反常色散效应和非线性效应的自发平衡可以导致孤子的产生。但孤子面积理论^[13-15]限制了孤子脉冲能量在皮焦量级。为了提高脉冲能量,色散管理结构被引入超快光纤激光器^[16],通过在正常色散部分脉冲的展宽演变来降低激光器中的非线性相位积累,从而避免脉冲分裂的出现并使得脉冲能量能够接近纳焦^[17]。因此,采用色散管理腔的超快光纤激光器中更容易观测到周期分岔的形成。2006 年,首次在全正色散光纤激光器中观测到超短脉冲的形成^[18]。不同于由反常色散效应和非线性效应的自发平衡产生的传统孤子,全正色散光纤激光器中产生的耗散孤子是正常色散效应、非线性效应、增益效应、带通滤波效应等多种效应共同作用的结果。全正色散光纤激光器中产生的耗散孤子的脉冲能量能高达几十纳焦,但其脉冲宽度也多在皮秒量级^[19-20]。随着泵浦功率的提高,脉冲分裂仍然会出现^[21]。

周期分岔现象首先在工作在反常色散区的光纤激光器中被观测到^[8],随后在色散管理光纤激光器中得到证实^[9,22]。除了正常的周期分岔现象^[8-9],Soto-Crespo 等人理论预计并实验复现了大倍数的周期分岔以及双重周期分岔的混合存在^[22]。根据具体的腔的设计,色散管理光纤激光器的色散工作区域可以覆盖从反常色散区到正常色散区。当色散管理光纤激光器工作在反常色散区时,在特定条件下可以实现多个脉冲的束缚态:多个脉冲以相同的脉冲间距束缚在一起作为一个整体在激光器中演变。通过实验发现周期分岔现象同样可以基于多脉冲束缚态而存在,如图 4 所示^[23]。周期分岔的基本单元不再是单

个脉冲,而是一个如图 5 所示的多脉冲束缚态。多个脉冲束缚在一起形成一个整体,这个整体可以作为基本单元呈现周期分岔。

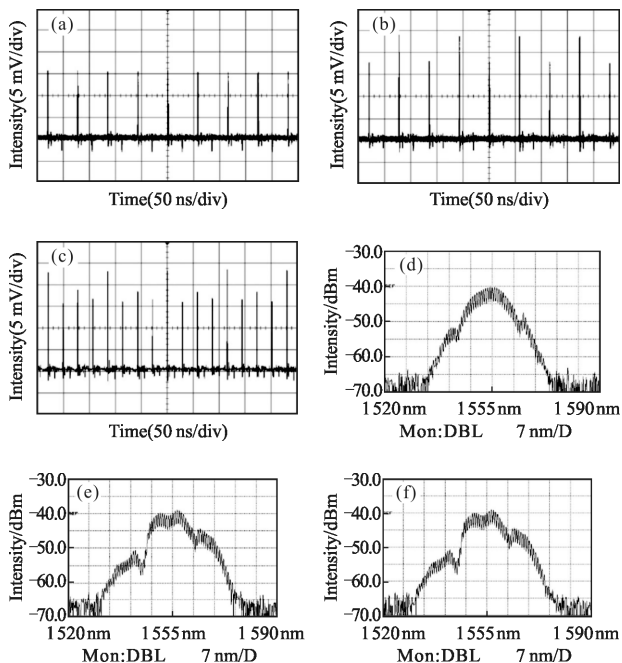


图 4 多脉冲束缚态的周期分岔测量结果

Fig.4 Oscilloscope trace and corresponding spectra of period-doubling bifurcations of a bound-soliton pulse train:

(a),(d) period-one state; (b),(e) period-two state;
(c),(f) period-three state

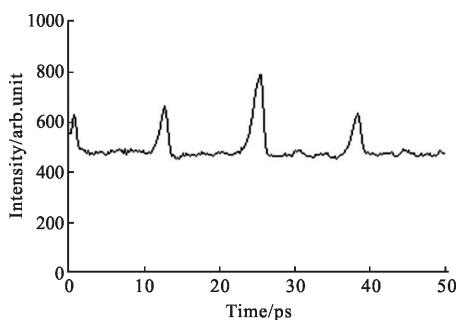


图 5 与图 4 对应的单个脉冲包络的自相关测量结果

Fig.5 A typical measured autocorrelation trace of the bound soliton (Fig.4)

在光纤激光器中,也可以实现间距随机的离散多脉冲状态。实验发现,即使是间距随机分布的多脉冲状态,当脉冲强度足够时,多脉冲状态中的所有脉冲也可以呈现周期分岔现象^[24]。如图 6 所示,腔内有两个脉冲同时存在,但脉冲能量较低时,两个脉冲高

度完全一致,当脉冲能量随着泵浦功率的提高而提高到一定程度时,周期二现象出现,两个脉冲保持步调一致,同升同降。实验还发现,多脉冲状态下的周期二现象并不要求所有脉冲同步变化,不同脉冲的周期二可以异步发生,如图 7 所示。

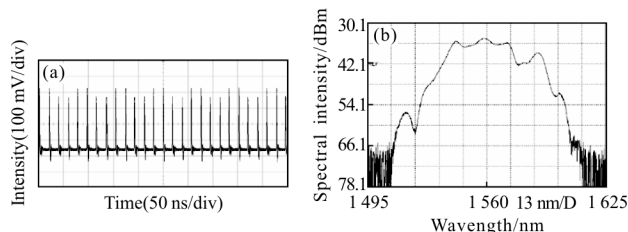


图 6 多脉冲状态下的周期二测量结果,(a) 脉冲序列,(b) 光谱
Fig.6 (a) Oscilloscope trace and (b) optical spectrum of a period-two multiple-soliton state (2 solitons in the cavity)

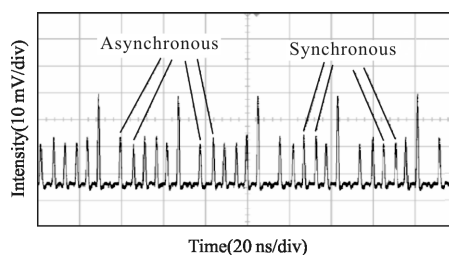
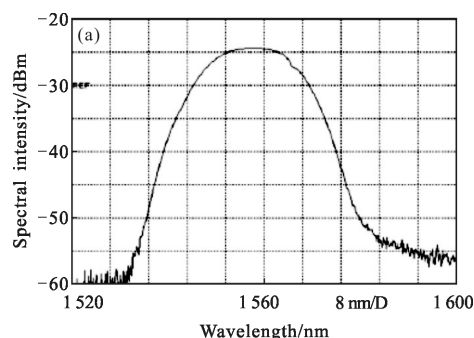


图 7 多脉冲状态下的周期二测量结果

Fig.7 Oscilloscope trace of period-two multiple-soliton states (the higher pulses with nearly twice intensity are caused by two closely spaced solitons)

色散管理光纤激光器的色散工作区域可以调整为接近零。在零色散区附近工作时,锁模脉冲不再具有典型的 Kelly 边带^[25],光谱更趋近于高斯形状。通过实验发现对于工作在零色散区附近的光纤激光器同样可以观测到周期分岔现象,实验结果表明周期分岔现象的发生与具体的脉冲形状无关^[26]。图 8 显示了工作在零色散区附近的色散管理光纤激光器中脉冲序列为周期一和周期二时对应的光谱图。



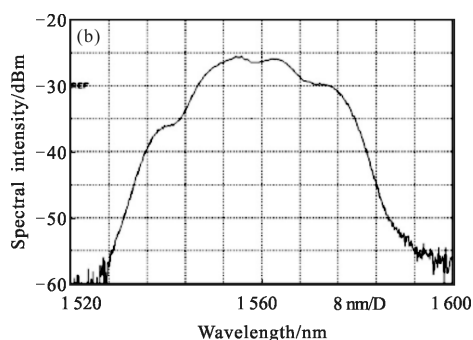


图 8 工作在零色散区的色散管理光纤激光器(a)周期一和(b)周期二状态下的光谱测量结果

Fig.8 (a) Optical spectrum of the period-one state; (b) optical spectrum of the period-two state in a dispersion-managed fiber laser with nearly zero dispersion

通过调整对应光纤的长度,可以让色散管理光纤激光器工作在正色散区,当色散值较大时,脉冲的成形机理与全正色散光纤激光器类似,都是多种效应共同作用的结果。虽然形成的耗散孤子相对于传统孤子的脉宽要宽,但脉冲能量也有量级的提高,因此在强泵浦作用下,系统中脉冲传播时积累的非线性相移仍有可能较大,周期分岔现象理论上应该存在。实验结果确证了笔者的预期^[27]。如图 9 所示,当色散管理光纤激光器工作在较大的正常色散区时,形成的脉冲具有陡峭的光谱边缘;在特定条件下,随着泵浦功率的提升,形成的增益支配孤子从原来的周期一状态转变为周期二状态,对应的边带数翻倍。RF 谱的测量结果(图 9(f))清楚地显示在对应激光器

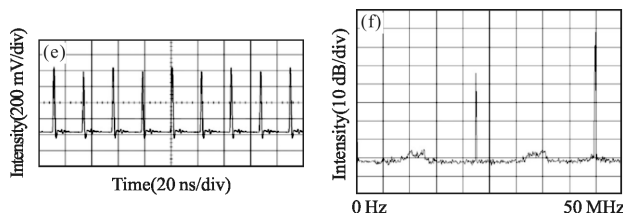
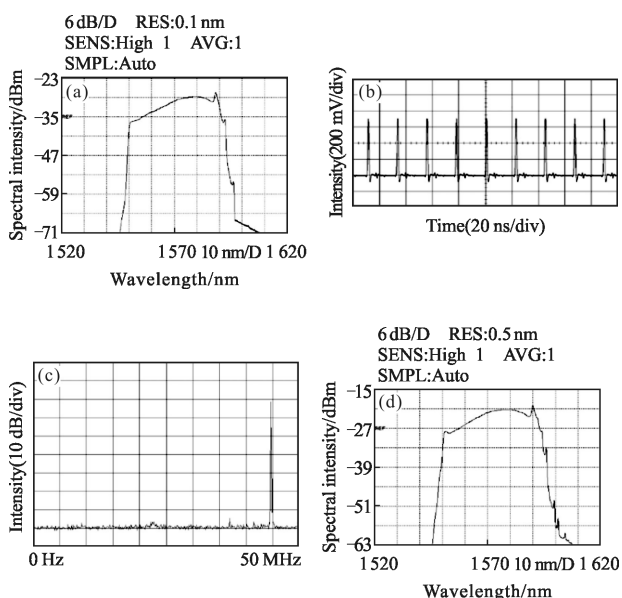


图 9 增益支配孤子分别呈现周期一和周期二状态时的光谱(a),(d)脉冲序列(b),(e)和 RF 谱(c),(f)

Fig.9 Period-one/two of GGSs in the laser (a), (d) optical spectrum; (b),(e) oscilloscope trace; and (c),(f) RF spectrum

基本重复频率一半的位置上出现信号及其谐波,证实周期二状态的存在。

3 矢量孤子光纤激光器中的周期分岔

由于制造工艺的局限性和使用过程中的随机环境影响,单模光纤中总是存在双折射,实际上支持两个互相垂直的偏振模式。光纤激光器的主体是光纤,因此光纤激光器中实现的实际上是矢量孤子^[28-29]。

通过使用偏振无关器件及与偏振无关的锁模机制,单模光纤的两个偏振方向上都可以形成孤子^[29]。由于交叉相位调制效应的作用,通过中心频率的偏移,可以实现对由两个偏振方向上的折射率差异所导致的群速度差异的补偿,从而使得两个偏振方向上形成的孤子分量绑定在一起以相同的群速度在光纤激光器中传播,即形成群速度锁定矢量孤子,如图 10 所示。矢量孤子两个偏振分量的中心频率偏移的大小与腔内双折射的大小密切相关:双折射越大,中心频率偏移越大,但两个偏振分量的强度差异也越大。

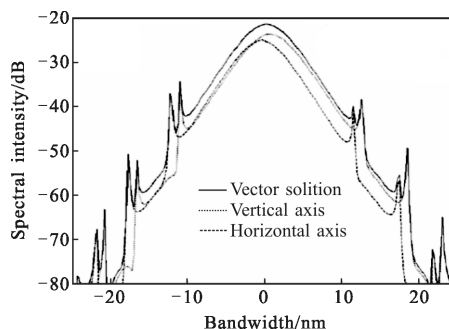


图 10 群速度锁定矢量孤子的光谱示例

Fig.10 Optical spectrum of group-velocity-locked vector soliton

设计了一个利用半导体饱和吸收镜锁模的矢量孤子光纤激光器^[30],如图 11 所示。实验发现,当矢量孤子的脉冲峰值功率足够强时,基于矢量孤子也可以实现周期分岔。通过数值模拟我们发现因为矢量孤子具有两个垂直偏振分量,因此矢量孤子的周期分岔更为复杂,可以表示为两种情况:(1)两个偏振分量同步呈现为周期分岔,矢量孤子整体表现为周期分岔;(2)两个偏振分量异步呈现为周期分岔,矢量孤子整体可表现为周期分岔或为周期一。矢量孤子整体的周期分岔与两个分量的周期分岔可能同步,也可能异步。图 12 给出了矢量孤子周期二的一个示例:水平偏振分量呈现较强的周期二,垂直偏振分量周期二较弱;矢量孤子整体呈现弱的周期二;水平偏振分量和垂直偏振分量的周期二演变为异步。实验还发现,多个矢量孤子也可以呈现同步/异步周期二,如图 13 所示。多个矢量孤子处于周期二时,各个矢量孤子的偏振分量的同步情况则更为复杂。

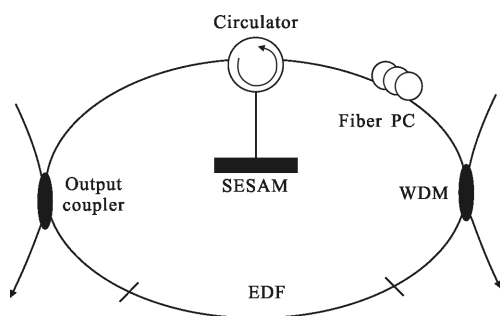


图 11 矢量孤子光纤激光器示意图

Fig.11 Schematic of a vector soliton fiber laser

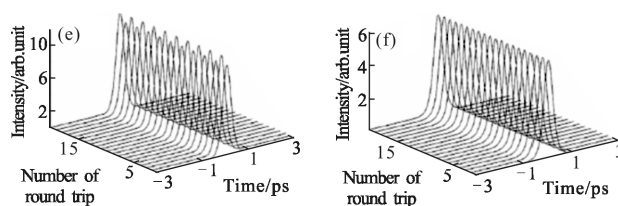


图 12 矢量孤子周期二状态示例(左:周期二;右:周期一;上:矢量孤子整体;中:水平偏振分量;下:垂直偏振分量)

Fig.12 Period-two/period-one of (a/b) the vector soliton, (c/d) the vector soliton along the horizontal birefringent axis, and (e/f) the vector soliton along the vertical birefringent axis with the cavity roundtrips

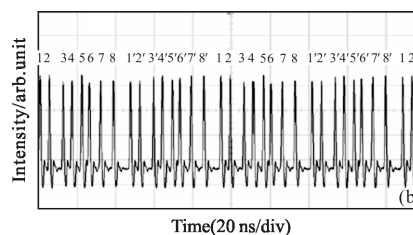
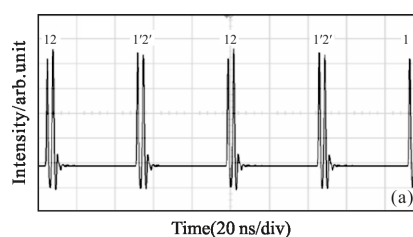
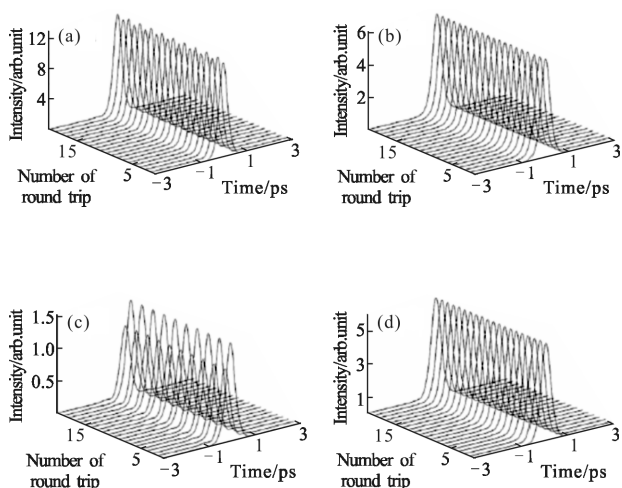


图 13 多个矢量孤子的周期二状态示例:(a)腔内有两个矢量孤子;(b)腔内有 8 个矢量孤子

Fig.13 Period-two of multiple vector solitons. (a) Two vector solitons; (b) eight vector solitons (the numbers and the supplemental marks identify the corresponding pulses experiencing period-two)



除了使用半导体饱和吸收镜锁模的光纤激光器可以产生矢量孤子,使用石墨烯或碳纳米管也可以实现矢量孤子锁模,因为石墨烯和碳纳米管饱和吸收体可以设计成与偏振无关。Song 等人在石墨烯锁模的掺铒光纤激光器中观测到基于单个矢量孤子和基于矢量孤子群的周期分岔^[31]。Wu 等人在掺铒光纤激光器中使用碳纳米管锁模在 2 μm 波段观测到矢量孤子的周期分岔^[32]。这说明矢量孤子的周期分岔和具体锁模机制以及波长都无关。

4 周期分岔现象的数值研究

光纤激光器中形成的孤子可以由非线性 Ginzburg-

Landau 方程进行描述。Akhmediev 等人^[10]首先通过 5 维参数空间对用 Complex Ginzburg Landau Equation (CGLE) 描述的使用快饱和和吸收体锁模的光纤激光器中产生脉冲进行了研究。周期分岔和混沌均可在数值模拟中找到相应的参数区间。

在早期针对超快光纤激光器的研究中,已经建立了一套数值模拟光纤激光器工作状态的模型。该模型考虑了光在单模光纤中的非线性传播效应、激光腔内增益介质的增益效应和增益色散效应、腔内各分立器件及其位置对激光器工作状态的影响,还

包括了腔的反馈及周期性边界条件等诸多因素^[11]。

简单地说,光纤激光器中的脉冲演变从一个弱脉冲开始,让该弱脉冲遵循实际的脉冲运行路径在光纤激光器中传播,整个激光器简化为两个部分,一部分是脉冲在光纤中的非线性传播,另一部分则是腔的等效透射函数,如图 14 所示。当脉冲遇到腔内的分立器件时,则乘以表征该器件的 Jones 矩阵。在腔内不断循环脉冲,迭代计算脉冲的演变过程直至获得稳定的脉冲解。考虑到光纤的弱双折射效应,脉冲在光纤中的非线性传播由耦合的非线性 Ginzburg-Landau 方程组来描述,如公式(1)所示:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = i\beta u - \delta \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{ik''}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{ik'''}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - iT_R u \frac{\partial |u|^2}{\partial t} + i\gamma \left(|u|^2 + \frac{2}{3} |v|^2 \right) u + \frac{i\gamma}{3} v^2 u^* + \frac{g}{2} u + \frac{g}{2\Omega_g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial v}{\partial z} = -i\beta v + \delta \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{ik''}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{ik'''}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} - iT_R v \frac{\partial |v|^2}{\partial t} + i\gamma \left(|v|^2 + \frac{2}{3} |u|^2 \right) v + \frac{i\gamma}{3} u^2 v^* + \frac{g}{2} v + \frac{g}{2\Omega_g} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{cases} \quad (1)$$

式中: u 和 v 为脉冲慢变包络振幅; z 为传输距离; t 为传输时间; $2\beta = 2\pi\Delta n/\lambda$ 是光纤的双折射; $2\delta = 2\beta\lambda/2\pi c$ 是群速度差的倒数; k'' 是二阶色散; k''' 是三阶色散; γ 是非线性系数; T_R 是拉曼常数; g 是增益; Ω_g 是增益带宽。对于被动光纤, $g=0$; 对于主动光纤, 增益饱和由公式(2)描述:

$$g = G \exp \left[- \frac{\int (|u|^2 + |v|^2) dt}{E_{\text{sat}}} \right] \quad (2)$$

式中: G 是小信号增益系数; E_{sat} 是饱和能量。

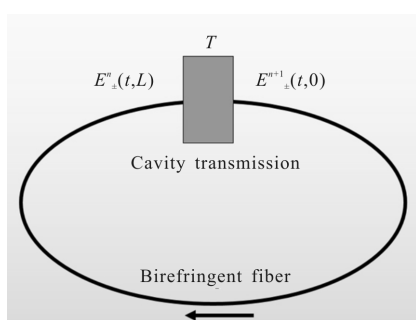


图 14 光纤激光器等效示意图

Fig.14 Round trip model

使用分步傅里叶方法,采用光纤激光器的实际参数,数值模拟复现了色散管理光纤激光器中的周期分岔到混沌现象^[31];复现了基于多脉冲^[24]、基于工作在零色散区的色散管理光纤激光器中产生的色散管理孤子^[26]、基于增益支配孤子^[27]和基于矢量孤子^[30]

的周期分岔现象等。

周期二分岔是非线性系统中常见的周期分岔。Akhmediev 等人通过改变非线性增益^[10],数值模拟得到一个特殊的周期分岔演变轨迹:周期三夹在两个周期六中间。通过改变光谱滤波的宽度或改变增益光纤的群速度色散系数的大小,Soto-Crespo 等人数值模拟得到周期三分岔。但是在实验中很难独立对非线性增益、光谱滤波的宽度或增益光纤的群速度色散系数的大小进行调控同时不影响其它操作参数。因此,找到可在实验中使用,并可以独立控制的参数对研究周期分岔现象就显得十分重要。通过数值模拟二阶色散为零的色散管理光纤激光器中的周期分岔现象^[34],发现可以通过独立控制小信号增益的大小来实现周期分岔,对应在实验中即独立控制泵浦的强弱。数值模拟发现,通过独立控制小信号增益的大小,在不同的操作条件下,可以得到周期二分岔到混沌的演化路径,也可以得到周期三分岔到混沌的演化路径。

5 结束语

周期分岔是非线性系统中普遍存在的一种特殊状态,是非线性效应在时域上的一种体现。在超快光纤激光器的研发及使用过程中,如何提高所产生的超短脉冲的脉冲能量一直是国内外研究的热点。基于光纤本身的结构特点,提高超快光纤激光器的单

脉冲能量一般意味着峰值功率的提高和激光器腔内非线性效应的增强。一般而言,非线性效应的增强意味着周期分岔现象出现几率的提高,因此,深入了解周期分岔现象的性质从而在提升脉冲能量的同时有效避免周期分岔现象的出现是超快光纤激光器研发的重点方向之一。

文中对超快光纤激光器中存在的周期分岔现象进行了总结。周期分岔可以在工作在不同色散区域的光纤激光器中产生;基于矢量孤子和多脉冲,周期分岔仍然存在,只是表现方式更为复杂。周期分岔的研究对我们理解非线性系统的性质是十分重要的,通过了解周期分岔的产生条件,可以强化对非线性系统的稳定性分析;通过对达到周期分岔点的阈值参数进行研究可以应用于微弱信号探测^[5];基于周期分岔的掺镱光纤激光器,人们已经实现了自校准的 $f\sim 2f$ 拍频^[35];基于周期分岔的掺铒光纤激光器已实现光频率梳的产生^[36]。相信基于周期分岔现象还有着广阔的潜在用途等待发掘。

参考文献:

- [1] May Robert M. Simple mathematical models with very complicated dynamics[J]. *Nature*, 1976, 261(5560): 459-467.
- [2] Lee ChangHee, Yoon T, Shin S Y. Period doubling and chaos in a directly modulated laser diode[J]. *Applied Physics Letters*, 1985, 46(1): 95-97.
- [3] Courtney Michael, Jiao Hong, Spellmeyer Neal, et al. Closed orbit bifurcations in continuum stark spectra [J]. *Physical Review Letters*, 1995, 74(9): 1538-1541.
- [4] Braun R, Feudel F, Guzdar P. Route to chaos for a two-dimensional externally driven flow [J]. *Physical Review E Statistical Physics Plasmas Fluids & Related Interdisciplinary Topics*, 1998, 58(2): 1927-1932.
- [5] Derighetti B, Ravani M, Stoop R, et al. Period-doubling lasers as small-signal detectors [J]. *Physical Review Letters*, 1985, 55(17): 1746-1748.
- [6] Lamela H, Carpintero G, Mancebo F J. Period tripling and chaos in the dynamic behavior of directly modulated diode lasers [J]. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 1998, 34(10): 1797-1801.
- [7] Sucha G, Bolton S R, Weiss S, et al. Nonlinear dynamics of additive pulse mode-locked lasers: period doubling and chaos [C]//Quantum Electronics & Laser Science Conference, JTuC6, 1993.
- [8] Tamura K, Doerr C R, Haus H A, et al. Soliton fiber ring laser stabilization and tuning with a broad intracavity filter [J]. *IEEE Photonics Technology Letters*, 1994, 6(6): 697-699.
- [9] Zhao L M, Tang D Y, Lin F, et al. Observation of period-doubling bifurcations in a femtosecond fiber soliton laser with dispersion management cavity[J]. *Optics Express*, 2004, 12(19): 4573-4578.
- [10] Akhmediev N, Soto-Crespo J M, Town G. Pulsating solitons, chaotic solitons, period doubling, and pulse coexistence in mode-locked lasers: Complex Ginzburg-Landau equation approach[J]. *Physical Review E Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics*, 2001, 63(2): 056602.
- [11] Tang D Y, Zhao L M, Zhao B, et al. Mechanism of multisoliton formation and soliton energy quantization in passively mode-locked fiber lasers [J]. *Physical Review*, 2005, 72(4): 043816.
- [12] Kafka J D, Hall D W, Baer T. Mode-locked erbium-doped fiber laser with soliton pulse shaping [J]. *Optics Letters*, 1989, 14(22): 1269-1271.
- [13] Hasegawa A, Tappert F. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibres. I. Anomalous dispersion [J]. *Applied Physics Letters*, 1973, 23(3): 142-144.
- [14] Tamura K, Haus H A, Ippen E P. Self-starting additive pulse mode-locked erbium fibre ring laser [J]. *Electronics Letters*, 1992, 28(24): 2226-2228.
- [15] Zakharov V E, Shabat A B. Exact theory of two dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media [J]. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1972, 34(1): 62-69.
- [16] Fermann M E, Hofer M, Haberl F, et al. Femtosecond fibre laser[J]. *Electronics Letters*, 1990, 26(20): 1737-1738.
- [17] Ilday F Ö, Wise F W, Sosnowski T. High-energy femtosecond stretched-pulse fiber laser with a nonlinear optical loop mirror[J]. *Optical Letters*, 2002, 27(17): 1531-1533.
- [18] Zhao L M, Tang D Y, Wu J. Gain-guided soliton in a positive group dispersion fiber laser [J]. *Optical Letters*, 2006, 31(12): 1788-1790.
- [19] Kieu K, Renninger W H, Chong A, et al. Sub-100 fs pulses at watt-level powers from a dissipative-soliton fiber laser[J]. *Optical Letters*, 2009, 34(5): 593-595.
- [20] Lefrancois S, Kieu K, Deng Y, et al. Scaling of dissipative-

- soliton fiber lasers to megawatt peak powers by use of large area photonic-crystal fiber[J]. *Optical Letters*, 2010, 35(10): 1569–1571.
- [21] Zhao L M, Tang D Y, Cheng T H, et al. Generation of multiple gain-guided solitons in a fiber laser [J]. *Optical Letters*, 2007, 32(11): 1581–1583.
- [22] Sotocrespo J M, Grapinet M, Grelu P, et al. Bifurcations and multiple-period soliton pulsations in a passively mode-locked fiber laser [J]. *Physical Review E Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics*, 2004, 70(2): 066612.
- [23] Zhao L M, Tang D Y, Zhao B. Period-doubling and quadrupling of bound solitons in a passively mode-locked fiber laser [J]. *Optics Communications*, 2005, 252 (1–3): 167–172.
- [24] Zhao L M, Tang D Y, Cheng T H, et al. Period-doubling of multiple solitons in a passively mode-locked fiber laser[J]. *Optics Communications*, 2007, 273(2): 554–559.
- [25] Kelly S M J. Characteristic sideband instability of periodically amplified average soliton[J]. *Electronics Letters*, 1992, 28(8): 806–807.
- [26] Zhao L M, Tang D Y, Cheng T H, et al. Period-doubling of dispersion-managed solitons in an Erbium-doped fiber laser at around zero dispersion [J]. *Optics Communications*, 2007, 278(2): 428–433.
- [27] Zhao L M, Tang D Y, Wu X, et al. Period-doubling of gain-guided solitons in fiber lasers of large net normal dispersion [J]. *Optics Communications*, 2008, 281 (13): 3557–3560.
- [28] Cundiff S T, Collings B C, Akhmediev N N, et al. Observation of polarization-locked vector solitons in an optical fiber [J]. *Physical Review Letters*, 1999, 82 (20): 3988–3991.
- [29] Zhao L M, Tang D Y, Zhang H, et al. Soliton trapping in fiber lasers[J]. *Optics Express*, 2008, 16(13): 9528–9533.
- [30] Zhao L M, Tang D Y, Zhang H, et al. Period-doubling of vector solitons in a ring fiber laser [J]. *Optics Communications*, 2008, 281(22): 5614–5617.
- [31] Song Y F, Liang Z M, Zhang H, et al. Period-doubling and quadrupling bifurcation of vector soliton bunches in a graphene mode locked fiber laser [J]. *IEEE Photonics Journal*, 2017, 9(5): 1–8.
- [32] Wu Z C, Fu S N, Jiang K, et al. Switchable thulium-doped fiber laser from polarization rotation vector to scalar soliton [J]. *Scientific Reports*, 2016, 6: 34844.
- [33] Tang D Y, Zhao L M, Lin F. Numerical studies of routes to chaos in passively mode locked fiber soliton ring lasers with dispersion-managed cavity [J]. *Europhysics Letters*, 2005, 71 (1): 56–62.
- [34] Zhang Qian, Li Lei, Tang D Y, et al. Period-timing bifurcations in a dispersion-managed fiber laser with zero group velocity dispersion[J]. *IEEE Photonics Journal*, 2016, 8(6): 1504608.
- [35] Zhao J, Li W X, Bai D B, et al. Self-referenced f-to-2f beat note of a period-doubling mode-locked Yb-fiber laser[J]. *IEEE Photonics Technology Letters*, 2015, 27(5): 459–461.
- [36] Wu Haoyu, Ma Ting, Lu Qiao, et al. Optical frequency combs based on a period-doubling mode-locked Er-doped fiber laser[J]. *Optics Express*, 2018, 26(1): 577–585.