

## 地基大口径望远镜库德光路误差建模

郝亮, 明名\*, 吴小霞, 吕天宇, 王洪浩

(中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033)

**摘要:** 为更好地实现地基大口径望远镜库德光路的集成装调, 在三个层次上对其误差进行分析, 并利用“Brownian Bridge”过程建立了库德光路误差模型。首先, 基于光径方程分析了库德光路在大气扰动影响下的光线偏离情况; 其次, 分析了动态误差所引起的光学模糊以及重力作用下的累积印透效应; 最后, 根据“Brownian Bridge”过程, 在充分考虑误差闭合链的情况下, 建立了库德焦点位置误差的模型。结果表明: 即使在  $0.4\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{m}$  的温差下, 大气扰动也可以引起  $0.2''$  左右的偏差, 且与  $2.3\text{ mm}$  的大气相干长度等效。同时, 由于折光补偿的符号是一致的, 故无法依靠多次测量平均抵消大气扰动的影响。根据改进的误差模型, 库德焦点的位置误差与基于独立同分布的假设所得的结果相比, 降低了约 20%, 即更充分地考虑了误差闭合的情况。

**关键词:** 大口径望远镜; 库德光路; 误差分析; Brownian Bridge

**中图分类号:** TH751 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3788/IRLA201948.0318001

## Error modeling of Coude optics system in ground-based large telescope

Hao Liang, Ming Ming\*, Wu Xiaoxia, Lv Tianyu, Wang Honghao

(Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China)

**Abstract:** In order to better analyze the integrated installation of ground-based large telescopes' Coude optics system, the error analysis was carried out on three levels, and the "Brownian Bridge" walk was used to establish the Coude optics system error model. Firstly, based on the equation of light path, the optical fuzzy the Coude optics system under the influence of atmosphere disturbed was analyzed. Secondly, the optical blur caused by dynamic error and the accumulation printing through effect of gravity were analyzed. Finally, using the "Brownian Bridge" walk, the error model of the focus position of the Coude optics system was established under the full consideration of error chain closure. The results show that even in the temperature gradient of  $0.4\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{m}$ , atmospheric disturbances can also cause the deviation of about  $0.2''$ , equaling to the atmospheric coherent length of  $2.3\text{ mm}$ . On the other hand, because the symbols of the refractive compensation were consistent, the effects of atmospheric disturbances cannot be compensated by averaging. According to the improved error model, focus position error of the Coude optics system reduce about 20% compared to the results obtained based on the assumption of independent distribution, that is, the error closure was considered more fully.

**Key words:** large telescope; Coude optics system; error analysis; Brownian Bridge

收稿日期: 2018-11-10; 修订日期: 2018-12-20

基金项目: 国家自然科学基金(11703026)

作者简介: 郝亮(1984-), 男, 助理研究员, 博士, 主要从事大型望远镜光机系统设计方面的研究。Email: 24133412@qq.com

通讯作者: 明名(1983-), 男, 副研究员, 硕士, 主要从事光学设计方面的研究。Email: 18987610@qq.com

## 0 引言

随着深空探测发展以及对暗物质、暗能量探索需求的增加,地基大口径望远镜的尺寸越来越大。库德光路作为耦合机上主光学系统与机下科学终端的中介,发挥了愈加重要的作用。与此同时,为了保证库德光路可以更好地发挥其光路对接功能,库德光路误差分析也成为了研究的热点<sup>[1-4]</sup>。

库德光路误差可使用库德焦点的位置精度与光束质量进行表征。相对应的,库德光路误差也具有若干个层次。最基本的层级为库德焦点几何位置的变化,中国科学院长春光学精密机械研究所的研究人员<sup>[5-8]</sup>从坐标变换矩阵的角度入手,分析了望远镜方位、俯仰运动所带来的像点偏移,用于指导系统装调;第二个层次为库德镜在动态载荷下,所产生的像质模糊;第三个层次为库德光路所引入的波前误差。

当光线在大气中传播时,由于空气折射率的变化,使得光线不再沿直线传播而是以一种复杂的曲线传播。该曲线在大地测量领域被称为“光径”。随着地基大口径望远镜尺寸的不断增大,库德光路的长度将达到几百米,在其装调检测的过程中,用以准直以及测量的光线也会在较大的测量尺度内形成“光径”。基于“光径”分析,同时兼顾库德镜所对应的特殊边界条件,可以得到由于大气所引入的几何像点位置偏移,同时进一步完善库德光路的误差分析理论。

对于传统库德光路,由于自身口径较小,库德反射镜可近似为理想平面镜。当系统逐渐增大,库德镜自身的面形起伏也会对所中继的波前产生影响。虽然对于地平式望远镜而言,库德镜的重力工况相对变化较小,但值得注意的是,在大型地基望远镜中,由于跟踪架误差(方位、俯仰不垂直、机械轴与光轴不重合、轴系晃动等的误差),系统入瞳在每块库德镜上的投影位置将会发生变化,所引入的误差也会有变化。对于波前层次的误差而言,可借助大口径平面镜面形误差(多点支撑近似)的量纲分析方法进行研究<sup>[9-12]</sup>。

与此同时,库德光路的误差具有一定的封闭性,即不考虑随机误差主导的情况下,其误差会成一定

的周期性。因此,使用传统的误差分析方法在计算各种统计矩时,会产生一定的偏差。从随机过程的角度上讲,可将库德光路误差近似为马尔科夫过程,与普通的高斯白噪声过程不同,其平均常返时是一个有限值。因此,基于库德光路误差的这种特性,提出了一种适用于库德光路的误差模型<sup>[13-15]</sup>。

## 1 大气扰动分析

以 4 m 级地基望远镜的库德光路为例,由于大气扰动而产生库德光路“光径”偏折如图 1 所示。

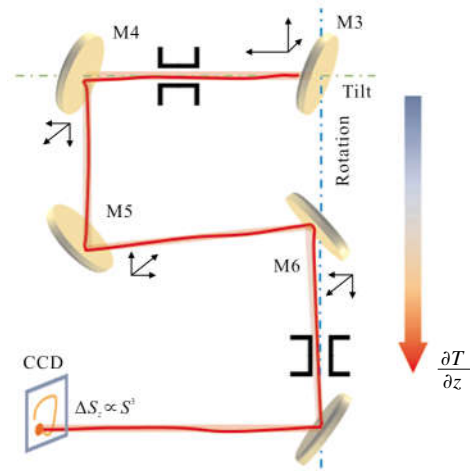


图 1 库德光路及其光径偏折

Fig.1 Coude optics system and its light path deviation

根据光径的基本方程可建立光径曲率  $K_z$ 、 $K_y$  与折射率  $n$  之间的关系,如公式(1)、(2)所示:

$$K_z = -\frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \frac{dn}{dz} \quad (1)$$

$$K_y = -\frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \frac{dn}{dy} \quad (2)$$

假设光线沿  $X$  轴传播,而光径函数在另外两个坐标平面中的投影分别为  $y$ 、 $z$ ,均为关于  $X$  的函数。同时,利用空间曲线的基本性质可得公式(3)、(4):

$$z''/(1+z'^2)^{3/2} = -K_z \quad (3)$$

$$y''/(1+y'^2)^{3/2} = -K_y \quad (4)$$

联立公式(1)、(4)可得公式(5)、(6):

$$z''/(1+z'^2)^{3/2} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \frac{dn}{dz} \quad (5)$$

$$y''/(1+y'^2)^{3/2} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \frac{dn}{dy} \quad (6)$$

以 Z 方向为例,对公式(5)进行等价变形,可得:

$$\frac{z''}{\sqrt{1+z'^2}} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dz} \quad (7)$$

对公式(7)两边进行积分可得:

$$z' = \tan\left(\int_0^x \frac{1}{n} \frac{dn}{dz} dz + C_1\right) \quad (8)$$

由公式(8)可知,z 方向的折光补偿的倒数与空气折射率以及  $n/dz$  有关。为了对  $n/dz$  进行估计,可根据 Barrel-Sears 公式建立不同压强、温度、水蒸气分压与大气的折射率的关系表示为:

$$n-1=0.002\ 695\ 79(n_0-1)\frac{P}{T}-0.112\ 697\ 08\times 10^{-6}\frac{e}{T} \quad (9)$$

式中: $T$  为温度; $P$  为压强; $e$  为水蒸气分压。对公式(9)进行偏导运算可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(n-1) &= 0.002\ 695\ 79(n_0-1)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P}{T}\right) - \\ & 0.112\ 697\ 08\times 10^{-6}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e}{T}\right) = 0.002\ 695\ 79(n_0-1)\frac{\partial P}{T^2} - \\ & 0.112\ 697\ 08\times 10^{-6}\frac{\partial e}{T^2} - [0.002\ 695\ 79(n_0-1)P + \\ & 0.112\ 697\ 08\times 10^{-6}e]\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \quad (10)$$

为获得 z 方向上的光径显式表达,需要对曲线的边界条件进行判定。首先,“光径”曲线过(0, 0)点,同时光径在零点的切线,可以等效为望远镜三镜的俯仰角(即  $z'|_{x=0} = \theta^\circ$ )。将上述边界条件代入公式(8)可得:

$$\begin{aligned} C_1 &= \arctan\theta - \left(\int_0^x \frac{1}{n} \frac{dn}{dz}\right)\Bigg|_{x=0} \\ C_2 &= -\left[\int \tan\left(\int_0^x \frac{1}{n} \frac{dn}{dz} dz + C_1\right) dX\right]\Bigg|_{x=0} \end{aligned} \quad (11)$$

使用数值积分的方法,可估计在 z 方向上的光径偏离。为了简化分析过程,假设库德光路附近的大气折射率分布整体随机而局部有序;在其局部有序的尺度内,假设空气折射率服从 1.002 5~1.003 5 之间的均匀分布,同时,温度梯度分别取 0.1、0.2、0.4、0.8、1.6 °C/m。不同温度梯度下的光径函数如图 2 所示。

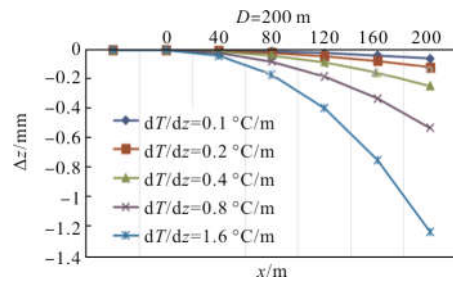


图 2 不同温度梯度下的光径函数

Fig.2 Light path deviation function at different temperature gradients

大气湍流作用下的波前倾斜均方根表示为:

$$\sigma_z^2 \approx 0.36z^2 (\lambda/\Phi)^{\frac{1}{3}} (\lambda/r_0)^{\frac{5}{3}} \quad (12)$$

式中: $\Phi$  为通光口径; $\lambda$  为波长; $r_0$  为大气相干长度。

对公式(12)进行变形可得:

$$r_0^{\frac{5}{3}} \approx 0.36z^2 \sigma_z^{-2} (\lambda/\Phi)^{\frac{1}{3}} \lambda^{\frac{5}{3}} \quad (13)$$

根据公式(13)可以将折光补偿折合到视宁度表征(大气相干长度  $r_0$ )上去,取通光口径  $\Phi=10$  mm,波长  $\lambda=0.5$  μm,可得表示大气相干长度  $r_0$ ,如图 3 所示。同时,在 0.4 °C/m 的情况下,分析由于蒙特卡洛法所带来的概率分布,可见统计学意义上的浮动对结论的影响很小。

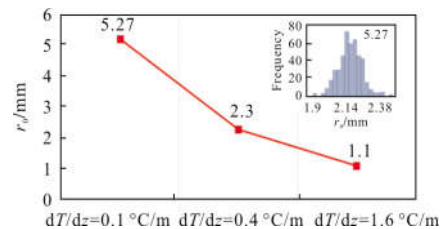


图 3 折光补偿折合大气相干长度

Fig.3 Refraction compensation for atmosphere correlation length

## 2 振动影响以及积累重力印透

振动所引起的模糊与光学传递函数截止频率的变化存在着对应关系。对于第二层次的误差,利用光学传递函数可估计各个库德镜由动态载荷所带来的像质损失。其表达式为 0 阶贝塞尔函数,如公式(14)所示:

$$OTF=J_0(A\Omega) \quad (14)$$

式中: $A$  为抖动的幅值; $\Omega$  为归一化频率。抖动幅值与截止频率的关系如图 4 所示。

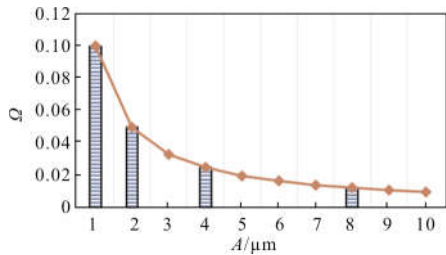


图 4 抖动幅值与截止频率的关系

Fig.4 Relationship between amplitude and cut off frequency

对于传统望远镜而言，其库德光路中的库德镜尺寸十分有限，其刚度足以保持其自身的面形，但是，对于大口径望远镜而言，其库德镜的口径将超过 600 mm(即传统支撑方法的极限)，由于多点支撑，当系统入瞳投影到镜面的不同位置，引入系统波前的误差也不尽相同，另一方面，由于库德光路一般采用有焦系统，由于光束收缩的影响，每级库德镜对最后结果的影响也不同。设厚度  $h$  的库德镜在  $M$  点的支撑下，平面镜与重力夹角为  $\theta$ ，面形  $rms$  表示为：

$$\sigma_{rms} = \zeta \frac{qS^2}{M^2 D} \sin(\theta) \sim \frac{S^2}{M^2 h} \sin(\theta) \quad (15)$$

式中： $\zeta$  为系数； $q=mg/S$ ； $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$ ， $E$  为弹性模量； $\nu$  为泊松比； $S$  为系统入瞳在库德镜上的投影面积。由于光路是收缩的，不同位置的库德镜，镜面上入瞳的投影也不同，可折合到不同的支撑点数目与面积上，考虑到有焦系统的缩束效应，有  $S_i:S_j=L_j^2:L_i^2$ ， $L_i$  为库德镜与系统入瞳距离。考虑到  $M_i$  为离散取值，故取： $M_i=\text{int}[M_1/\text{int}(S_i/S_1)]$ 。

根据上述分析可得，库德光路由于重力印透所产生的误差如公式(16)所示：

$$\sigma_{rms}^2 \sim \sum_{i=1}^N \frac{S_i^2}{M_i^4 h^4} \sin^2(\theta_i) = \frac{1}{h^4} \sum_{i=1}^N \frac{S_i^4 \sin^2(\theta_i)}{M_i^4} \quad (16)$$

累积的重力印透方差如图 5 所示，同时标注了

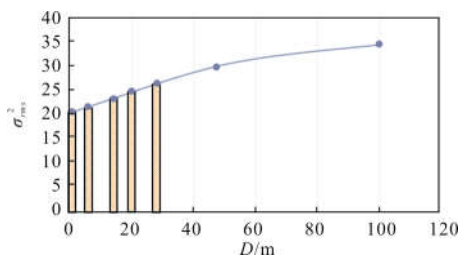


图 5 库德光路的重力印透累积

Fig.5 Accumulated print through in Coude optics system

前几面库德镜所积累的重力印透。

### 3 库德光路误差模型

库德光路的总体误差可以用拟合库德焦点的位置精度表示。以独立的高斯分布的角度建立库德光路的误差模型，最后的总误差由系统的测量误差以及光斑在两个方向上的偏离误差所决定。根据高斯—马尔科夫模型所得到的最小二乘估计结果的误差公式可得， $Y$  方向上拟合结果的精度为：

$$E_Y^2 = \sigma_0^2 \text{trace}[(N_{11}^{-1}) + (N_{21} N_{11}^{-1})^T M^{-1} (N_{21} N_{11}^{-1})] + \text{trace}[(N_{11}^{-1} N_{12} \Delta Y^T)^T (N_{11}^{-1} N_{12} \Delta Y^T)] = \sigma_0^2 \text{trace}(N_{11}^{-1}) + \text{trace}[(N_{11}^{-1} N_{12} \Delta Y^T)^T (N_{11}^{-1} N_{12} \Delta Y^T)] \quad (17)$$

式中： $N_{11}=\Delta Z^T \Delta Z$ ； $N_{12}=\Delta Z^T \Delta Y$ ； $N_{22}=\Delta Y^T \Delta Y$ ； $M=N_{22}-N_{12}^T N_{12} N_{11}^{-1} N_{12}$ 。

设  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$  为  $N_{11}$  的特征值， $Q^T N_{11} Q = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i)$  设  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i$  为  $N_{22}$  的特征值， $U^T N_{22} U = \text{diag}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i)$ ，利用向量的特殊性质  $\det(I - y^T x) = 1 - x^T y$  可以对公式(16)进行等价变换，在此情况下，可得检测数据矩阵的奇异值为  $i$  重根，即  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_i = \frac{1}{2}$ ；以及  $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_i = \frac{1}{2}$ 。这不仅表明其条件数较低，系统拟合的数值鲁棒性较好，同时可就此估计库德光路的拟合误差如公式(18)所示：

$$E_Y = \sqrt{\sigma_0^2 \sigma_z^2 + \sigma_y^4} \quad (18)$$

$$E_Z = \sqrt{\sigma_0^2 \sigma_y^2 + \sigma_z^4}$$

其误差分布柱状图如图 6 所示。

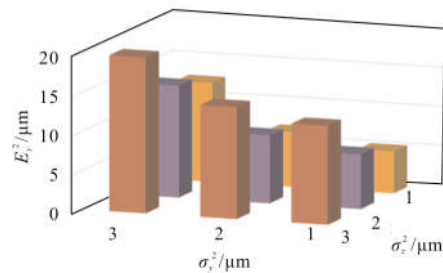


图 6 误差分布柱状图(高斯过程)

Fig.6 Error distribution bar graph (Gaussian process)

但实际上，在库德光路内部误差传递的过程中，

各个误差源不仅会偏离高斯分布，不能以互相独立变量合成方法进行处理。与此同时，实际的光点并不是完全随机的出现在靶面上，不论是系统的温差，还是振动以及重力工况的改变，都是以某种内在周期耦合随机游走的形式出现。根据随机过程的观点，如果一个过程在转移  $N$  步之后，以概率 1 达到某个状态，该过程被称为“Brownian Bridge”过程。在连续时间下定义的“Brownian Bridge”过程为：

$$B(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{\pi n} \sin(\pi n t) X_n(t) \quad (19)$$

式中： $X_n(t)$  为服从  $N(0, \sigma)$  的随机过程。“Brownian Bridge”经过转移后的方差为：

$$E \left[ \int_0^1 B^2(t) dt \right] = E \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^2(t)}{\frac{2}{\pi} \frac{2}{n}} s \right] \frac{\sigma^2}{6} \quad (20)$$

对于库德光路，当系统装调完成之后，各个子的误差传递到靶面上一般都是有一个明显的上限，同时，随着系统的周期运动，不论是以圆弧还是以帕斯卡心形曲线的形式，其误差都是有周期性的，故使用“Brownian Bridge”代替之前假设中的高斯过程，假设在进行拟合之前，已经进行过超过一个周期的数据采集，可基于“Brownian Bridge”过程的库德光路误差估计为：

$$E'_y = \sqrt{\frac{\sigma_0^2 \sigma_z^2 + \sigma_y^4}{6} + \frac{\sigma_y^4}{36}} \quad (21)$$

$$E'_z = \sqrt{\frac{\sigma_0^2 \sigma_y^2 + \sigma_z^4}{6} + \frac{\sigma_z^4}{36}}$$

其误差分布柱状图如图 7 所示。

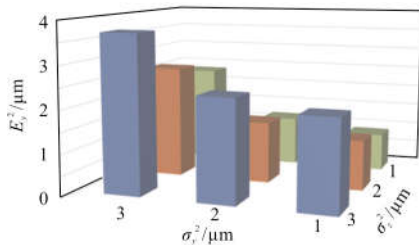


图 7 误差分布柱状图(“Brownian Bridge”过程)

Fig.7 Error distribution bar graph (“Brownian Bridge” process)

## 5 结论

文中从三个层次分析了大口径望远镜库德光路的误差，通过对光径方程与折光改正的研究，得出即

使很小的温度梯度，也可引起可观的偏差。同时，无法依靠多次测量平均抵消大气扰动的影响。与测量轴系误差时的谐波分析类似，充分考虑误差链闭合的情况下，库德焦点位置的误差与基于独立同分布的假设所得的结果会有很大出入。为了更充分的考虑了误差闭合的情况，需要使用“Brownian Bridge”过程进行分析。文中不仅对于库德光路的集成装调，对于大口径望远镜的装调检测的过程中出现的类似情况，也有很好的指导意义。

## 参考文献：

- [1] Helmberger J, Stadler K, Bestenreiner F, et al. Correction of axial deflection errors in rotating mirror systems [J]. *Optics and Laser Technology*, 1975, 7(6): 249–252.
- [2] Yuan Shuai, Zhang Jingxu, Wang Fuguo, et al. Lateral positioning system for large aperture primary mirror [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2017, 25(10): 2564–2571. (in Chinese)  
原帅, 张景旭, 王富国, 等. 大口径主镜的侧向定位系统 [J]. *光学 精密工程*, 2017, 25(10): 2564–2571.
- [3] Thompson L A, Teare S W. Rayleigh laser guide star systems: application to the university of illinois seeing improvement system [J]. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 2002, 114(799): 1029–1042.
- [4] Yang Fei, An Qichang, Zhang Jing, et al. Seeing metrology of large aperture mirror of telescope [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2017, 25(10): 2572–2579. (in Chinese)  
杨飞, 安其昌, 张静, 等. 大口径光学系统的镜面视宁度检测 [J]. *光学 精密工程*, 2017, 25(10): 2572–2579.
- [5] Li Jianfeng, Wu Xiaoxia, Li Yuxia, et al. Position control technology of large aperture mirror based on hydraulic support [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2017, 25(10): 2599–2606. (in Chinese)  
李剑锋, 吴小霞, 李玉霞, 等. 基于液压支撑的大口径主镜稳像技术 [J]. *光学 精密工程*, 2017, 25(10): 2599–2606.
- [6] Xue Xiangyao, Gao Yunguo, Zhang Wenbao, et al. Analysis of the beam pointing stability in coude optical path [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2013, 42(6): 1514–1518. (in Chinese)
- [7] Wang Guang, Gao Yunguo, Ma Yakun, et al. High accurate docking technology of laser and theodolite [J]. *Infrared and*

- Laser Engineering*, 2018, 47(7): 0706006. (in Chinese)  
王光, 高云国, 马亚坤, 等. 激光与经纬仪高精度对接技术[J]. 红外与激光工程, 2018, 47(7): 0706006.
- [8] Zhang Limin, Han Xida, Cao Yuyan, et al. Coude light path alignment scheme with spatial mechanism [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2017, 46(8):0818004. (in Chinese)  
张丽敏, 韩西达, 曹玉岩, 等. 基于空间机构学的 Coude 光路装调方法[J]. 红外与激光工程, 2017, 46(8): 0818004.
- [9] Liu Guangqian, Jiao Qigong, Deng Linhua, et al. Detection and calibration of optical axes change for one meter solar telescope [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2013, 40 (1): 0108004. (in Chinese)  
柳光乾, 校启公, 邓林华, 等. 1 m 太阳望远镜光轴变化检测与改正研究[J]. 中国激光, 2013, 40(1): 0108004.
- [10] Shi Yunsheng, Liu Bingqi, Ying Jiaju, et al. Calibration model of the telescope optical axis based on prism fretting theory[J]. *Semiconductor Optoelectronics*, 2013, 34(2): 338–341. (in Chinese)  
史云胜, 刘秉琦, 应家驹, 等. 利用棱镜微动理论建立望远镜光轴的检校模型[J]. 半导体光电, 2013, 34(2): 338–341.
- [11] Yang P, Hippler S, Zhu J, et al. Optimization of the transmitted wavefront for the infrared adaptive optics system [J]. *Science China–physics Mechanics & Astronomy*, 2014, 57(4): 608–614.
- [12] Yang P, Hippler S, Deen C, et al. Characterization of the transmitted near–infrared wavefront error for the GRAVITY/VLTI Coudé Infrared Adaptive Optics System [J]. *Optics Express*, 2013, 21(7): 9069–9080.
- [13] Li Sizhong, Yu Yunqi, Chen Jing, et al. System for parallelism detection of multi–spectrum optical axes [J]. *Journal of Applied Optics*, 2013, 34(4): 644–647. (in Chinese)  
李思众, 鱼云岐, 陈静, 等. 一种多光路光轴平行性检测系统[J]. 应用光学, 2013, 34(4): 644–647.
- [14] Anderson T, Stephens M. The continuous and discrete Brownian bridges: representations and applications[J]. *Linear Algebra Appl*, 1997, 264: 145–171.
- [15] Zhao Hongchao, Zhang Jingxu, Yang Fei, et al. Secondary mirror supporting structure for 1.2 m telescope [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2017, 25(10): 2614–2619. (in Chinese)  
赵宏超, 张景旭, 杨飞, 等. 1.2 m 望远镜次镜支撑结构设计[J]. 光学 精密工程, 2017, 25(10): 2614–2619.