

基于界面反射本征态的外尔超材料偏振特性研究

王涵钰 徐威 朱志宏 杨镖

Polarization characteristics of Weyl metamaterial based on interfacial reflection eigenmodes

Wang Hanyu, Xu Wei, Zhu Zhihong, Yang Biao

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.3788/IRLA20230233>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

新型太赫兹波束分离器的设计

Design of new terahertz beam splitter

红外与激光工程. 2020, 49(5): 20190290 <https://doi.org/10.3788/IRLA20190290>

利用高阶表面等离子体共振实现窄带完美吸收

Narrow-band perfect absorption utilizing higher-order surface plasmon resonance

红外与激光工程. 2020, 49(5): 20190489 <https://doi.org/10.3788/IRLA20190489>

偏振不敏感的九聚物太赫兹超材料

Polarization-independent nonamer terahertz metamaterial

红外与激光工程. 2017, 46(12): 1221002 <https://doi.org/10.3788/IRLA201746.1221002>

人工微结构薄层红外探测器的研究进展 (特邀)

Research progress of artificial microstructure thin layer infrared detector (*Invited*)

红外与激光工程. 2021, 50(1): 20211002 <https://doi.org/10.3788/IRLA20211002>

人工微结构太赫兹传感器的研究进展

Research progress of terahertz sensor based on artificial microstructure

红外与激光工程. 2019, 48(2): 203001 <https://doi.org/10.3788/IRLA201948.0203001>

基于太赫兹超材料的微流体折射率传感器

Terahertz refractive index sensing of microfluid based on metamaterials

红外与激光工程. 2017, 46(4): 420003 <https://doi.org/10.3788/IRLA201746.0420003>

基于界面反射本征态的外尔超材料偏振特性研究

王涵钰^{1,2}, 徐威^{1,2}, 朱志宏^{1,2}, 杨鏢^{1,2*}

(1. 国防科技大学 前沿交叉学科学院&新型纳米光电信息材料与器件湖南省
重点实验室, 湖南长沙 410073;
2. 国防科技大学 南湖之光实验室, 湖南长沙 410073)

摘要:近年来,因为体现出诸多异常拓扑现象,外尔超材料一直备受关注。此前的研究表明外尔超材料的反射场具有偏振转换特性。然而,关于反射本征态的讨论却不够深入,原因在于入射电磁场与反射电磁场处于不同的态空间,给分析计算带来了诸多不便。文中从电场为极矢量、磁场为轴矢量的基本特性出发,通过引入镜像算符将入射态空间与反射态空间联系起来,最后对全反射界面的本征态进行了明确的定义。依据上述定义,笔者对外尔超材料的反射本征态进行了计算,结果显示:在入射电磁场为线性偏振的前提下,外尔超材料的反射本征态均为线性偏振态。反射本征态为线性偏振态,这一性质是由系统能量守恒与洛伦兹互易性共同保证的。经过进一步探讨发现,当动量空间的路径绕外尔点一圈时,本征态的电磁场方向旋转角度为 90° 。这也意味着如果电磁场要回到初始状态,动量空间的路径需绕外尔点4圈。这一现象的拓扑结构可以类比为四阶莫比乌斯环。此外,依据反射本征态为互相垂直的线性偏振态这一特性,笔者定义了旋转角度 θ 用以描述本征态朝向的变化规律。值得一提的是,这种计算方法不仅仅适用于外尔超材料,满足条件的全反射界面的反射本征态均可以依照上述定义与方法进行分析求解。

关键词: 超材料; 外尔点; 本征态; 线偏振; 莫比乌斯环

中图分类号: O436 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3788/IRLA20230233

0 引言

近年来,拓扑光子学领域的研究引起了广泛关注,其中一个重要分支便是对外尔点的研究。作为一种无质量的相对论费米子,外尔费米子在量子理论和标准模型中发挥着重要的作用。人们发现在打破时间反演对称性或者空间反演对称性的结构中,动量空间会出现受拓扑保护的外尔点,并可以用于类比外尔费米子的物理特性^[1-2]。在三维动量空间中,两条线性色散的能带互相接触构成外尔点,这类二重简并点具有鲁棒性。外尔点具有很多独特的性质,例如,手性正负的外尔点分别对应贝利曲率的源和漏,因此,

外尔点也被认为是动量空间的磁单极子^[3-4]。自然界中具有外尔点的材料通常被称为外尔半金属^[5-6]。在外尔半金属的界面上,非平庸表面态费米弧的存在是判定材料为外尔半金属的一大证据。除此之外,外尔半金属还具有手征反常^[7-8]、手征零能模式^[9-10]、螺旋表面态^[11-13]等独特的现象。

超材料是指将人工设计的亚波长结构以特定方式排列。由于可以人为设计、任意控制,能实现各种自然界难以出现的电磁特征,超材料现已被广泛应用于各个研究领域^[14-15],并已取得丰硕的成果,例如超透镜、高性能天线等。在微波波段,利用等效介质理论,可以合理设计各向异性的介电常数 ϵ 、磁导率 μ 等

收稿日期:2023-04-19; 修订日期:2023-05-30

基金项目:国家自然科学基金(62105240, 62075159); 国家重点研发计划(2019YFB2203002)

作者简介:王涵钰,女,博士生,主要从事拓扑光子学方面的研究。

导师简介:朱志宏,男,教授,博士,主要从事纳米光子学理论与器件、石墨烯类二维材料与器件、人工微纳结构与光场调控、微纳加工与集成光电电子芯片等方面的研究。

通讯作者:杨鏢,男,副研究员,博士,主要从事拓扑光子学方面的研究。

参数,在能带结构中引入简并点、简并线、椭圆色散、双曲面色散等^[16-18]特殊性质。基于空间反演对称性破缺这一要求,可以在微波波段设计出能带结构具有外尔点的超材料,为后续研究提供平台。

基于人工设计构建出的外尔超材料,笔者将讨论外尔超材料与空气界面的反射本征态。后续部分将按照如下顺序进行叙述:首先,对外尔超材料的电磁本构关系进行求解,接着论述反射本征态的定义与计算方法,最后展示外尔超材料与空气界面的反射本征态的求解结果。令人惊奇的是,在入射电磁场为线性偏振模式的前提下,外尔超材料的反射本征场在整个布里渊区范围内均为线性偏振模式,这一现象是由系统能量守恒与洛伦兹互易性共同保证的。

1 理想外尔超材料的本构关系

笔者利用理想外尔超材料^[9, 12, 18]进行后续的研究。这种外尔超材料具有十分优越的能带结构:在同一频率有 4 个第一类外尔点,并且在外尔点频率附近,没有其他的非拓扑能带干扰,这样的能带结构为探究外尔点的基础性质提供了很好的平台。

外尔超材料由结构单元平移构成,结构单元主体为马鞍型金属结构,如图 1(a) 金色部分所示。马鞍型金属结构具有 D_{2d} 点群对称,这样的结构打破了空间反演对称性。金属结构外部包裹有各向同性背景材料。由于背景材料仅起支撑作用,在此没有画出。通过将结构单元周期性排列,应用仿真软件,可以计算得到外尔超材料的本征频率随动量的变化,即外尔超材料的能带结构。图 1(b) 是外尔点频率附近的能带

结构图,灰色半透明面标注外尔点频率的等频面,能带结构与等频面的交点只有 4 个外尔点,意味着在该频率除了外尔点以外,没有其他本征态。

利用等效介质理论,马鞍型金属结构的电磁场特性可以十分简洁的形式来描述。马鞍型金属结构单元可以被等效为两个开口环共振结构 (SRR) 互相嵌套在一起,见图 1(a)。其中蓝色开口环与红色开口环互相垂直、朝向相反,其余几何参数则完全相同。依据文献 [12] 中的等效介质理论,考虑金属开口环在外电磁场中的电子响应,写出连续参数变化的理论描述。为了简化运算,设置 $\epsilon_0 = \mu_0 = c = 1$ 。由此,利用 RLC 电路模型,两个开口环的电流 I 和电荷分布 q 可以被写成如下形式:

$$\text{SRR A (Red)}: -i\omega I_A - \frac{R}{L}i\omega q + \omega_0^2 q_A = \frac{1}{L}(E_y l - i\omega H_x a) \quad (1)$$

$$\text{SRR B (Blue)}: -i\omega I_B - \frac{R}{L}i\omega q + \omega_0^2 q_B = \frac{1}{L}(E_x l - i\omega H_y a) \quad (2)$$

式中: a 为开口环的面积; l 为边长; 开口环的本征共振频率为 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, L 和 C 分别为电感和电容; ω, E, H 分别为外电场的频率以及电场、磁场面内场的分量。这里考虑没有损耗的情况,取电阻为零 $R=0, \gamma = \frac{R}{L} = 0$ 。

麦克斯韦方程组可写为:

$$D = E + P = \epsilon E + \zeta H \quad (3)$$

$$B = H + M = \mu H + \xi E \quad (4)$$

其中,电磁耦合项写为:

$$\zeta = i\chi \quad (5)$$

$$\xi = -i\chi \quad (6)$$

由此写出马鞍型金属结构的本构矩阵为:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{L} \frac{l^2}{\omega_0^2 - \omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{L} \frac{l^2}{\omega_0^2 - \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{L} \frac{\omega^2 a^2}{\omega_0^2 - \omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{L} \frac{\omega^2 a^2}{\omega_0^2 - \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

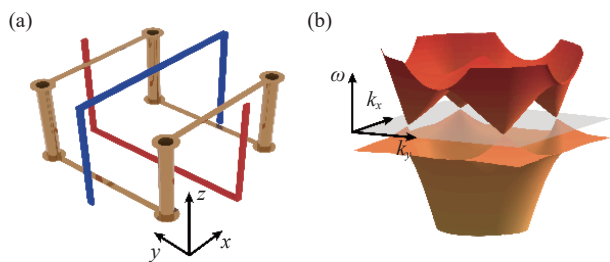


图 1 (a) 马鞍型金属结构与等效开口环共振模型; (b) 理想外尔超材料的能带结构: 4 个外尔点在同一频率

Fig.1 (a) Saddle shaped metallic structure and effective split ring resonator model; (b) Band structure of ideal Weyl metamaterial: four Weyl nodes located at the same frequency

$$\chi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \frac{-\omega la}{\omega_0^2 - \omega^2} & 0 \\ \frac{1}{L} \frac{-\omega la}{\omega_0^2 - \omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

接下来,在外尔点频率,考虑半无限外尔超材料与空气界面的反射: $z < 0$ 为外尔超材料, $z > 0$ 为空气(均匀介质), $z = 0$ 的平面为外尔超材料与空气的分界面。由于除了外尔点以外,该频率不存在其他能带,在动量空间内材料体现出全反射特性,入射态空间与反射态空间的能量守恒,透射态空间能量为零。

外尔超材料具有偏振转换特性,当入射电磁场为线性偏振模式时,在外尔点附近反射场出现了椭圆偏振,见图 2。箭头表示偏振态电磁场分布及分量的相位关系,在靠近布里渊区边界时,反射电磁场为线偏振模式,而外尔点附近则出现了椭圆偏振模式。图 2 的底色表示斯托克斯参量 $S_3 = 2E_x E_y \sin \Delta$,用以表征偏振态椭圆度在布里渊区内的变化: x 方向电场分量与 y 方向相位差越大, $|S_3|$ 越大, $S_3 = \pm 1$ 为圆偏振光;若偏振态为线性模式,则 $S_3 = 0$ 。以图 2(a) 为例,在靠近布里渊区边界的地方,图片底色呈现灰色, $S_3 = 0$,说明入射电磁场为 TE 模式,反射得到仍是线性偏振模式;而在靠近左上角外尔点的位置,图片底色接近白色,说明当入射电磁场为线偏振模式时, S_3 接近 1,反射得到的是椭圆偏振模式,入射模式与出射模式对比发生了偏振转换。值得一提的是,左上角与右下角的外尔点手性相同,反射场的性质也类似。对于整个二维布里渊区而言,反射场满足 C_2 旋转对称性。

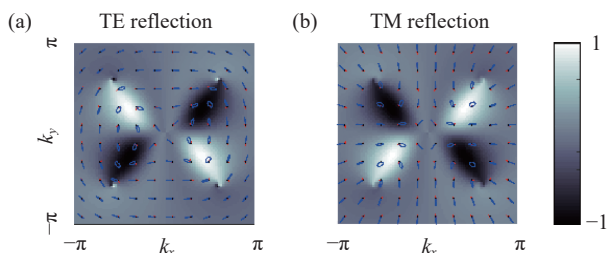


图 2 外尔超材料的反射电磁场。(a) TE 模式入射; (b) TM 模式入射,背景为斯托克斯参量 S_3 分量

Fig.2 Reflection electromagnetic field of Weyl metamaterial. (a) TE mode incident; (b) TM mode incident. The background color indicates the S_3

2 反射本征态

2.1 建立态空间的联系

根据边界连续条件,在给定入射电磁场的前提下,反射电磁场是唯一确定的。但需要注意的是,入射态空间与反射态空间的波矢并不相同,在均匀介质的界面,不考虑高阶散射,若入射波矢为 $\vec{k}_{in} = [k_x, k_y, k_z]$,对应的反射波矢则是 $\vec{k}_{ref} = [k_x, k_y, -k_z]$,反射波矢与入射波矢相比,垂直于界面的波矢分量方向相反。所有入射电磁场均定义在入射波矢 $\vec{k}_{in} = [k_x, k_y, k_z]$ 的前提下,与反射电磁场属于不同的态空间。因此,对于入射电磁场与反射电磁场这两个不同的态空间,需要分别定义电磁场基矢,用以描述入射和反射模式。

经过界面反射后,对比反射波矢与入射波矢,只有垂直于界面的分量符号发生改变,平行于界面的分量保持不变。因此,笔者定义镜像算符 \widehat{M} 将入射波矢与反射波矢联系起来,从而建立起入射态空间与反射态空间两者的联系。

在每个态空间,需要两个线性无关的电磁场模式来构成一组基矢,例如,在电磁场分析中,常用一组线性偏振态 $|TE\rangle, |TM\rangle$ 作为基矢。在入射态空间,用 $|\text{Down}_1\rangle, |\text{Down}_2\rangle$ 来表示任意一组基矢,入射态空间所有可能的电磁场模式均可以表示为这组基矢的线性叠加。此处 $|\text{Down}_1\rangle, |\text{Down}_2\rangle$ 不限定为线偏振模式,两个线性无关的椭圆偏振模式、或者左旋圆偏振光与右旋圆偏振光也可以构成一组基矢。

$$|\text{Down}_1\rangle = [E_{1x}, E_{1y}, E_{1z}, H_{1x}, H_{1y}, H_{1z}]^T \quad (10)$$

$$|\text{Down}_2\rangle = [E_{2x}, E_{2y}, E_{2z}, H_{2x}, H_{2y}, H_{2z}]^T \quad (11)$$

入射模式基矢 $|\text{Down}_1\rangle, |\text{Down}_2\rangle$ 对应的反射模式分别记为 $|\text{Up}_1\rangle, |\text{Up}_2\rangle$,

$$|\text{Down}_1\rangle = \widehat{M} |\text{Up}_1\rangle, |\text{Down}_2\rangle = \widehat{M} |\text{Up}_2\rangle$$

入射态空间与反射态空间是同构的,因此 $|\text{Up}_1\rangle, |\text{Up}_2\rangle$ 也是一组线性无关的模式,可以成为反射态空间的一组基矢。

镜像算符定义为, $\widehat{M} |\text{Down}_i\rangle = |\text{Up}_i\rangle, i = 1, 2$ 。波矢与电场均是极矢量 (polar vector), 见图 3(a), 在镜像操作下平行界面的分量保持不变,垂直界面分量的符号反向,即

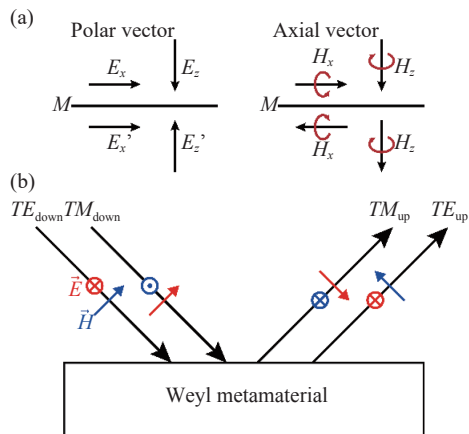


图 3 (a) 极矢量与轴矢量; (b) 一组本征态

Fig.3 (a) Polar vector and axial vector; (b) Illustration of a set of basis

$$[E_{1x}, E_{1y}, E_{1z}]^T \xrightarrow{\hat{M}} [E_{1x}, E_{1y}, -E_{1z}]^T \quad (12)$$

而磁场是由极矢量向量积定义 ($\vec{k} \times \vec{E}$), 为轴矢量 (axis vector), 在镜像操作下平行于界面的分量符号反向, 而垂直于界面分量则保持不变,

$$[H_{1x}, H_{1y}, H_{1z}]^T \xrightarrow{\hat{M}} [-H_{1x}, -H_{1y}, H_{1z}]^T \quad (13)$$

结合电场分量与磁场分量经由界面反射后, 分量符号的变化规律, 写出 $|U_{p1}\rangle, |U_{p2}\rangle$ 的分量形式为:

$$|U_{p1}\rangle = [E_{1x}, E_{1y}, -E_{1z}, -H_{1x}, -H_{1y}, H_{1z}]^T \quad (14)$$

$$|U_{p2}\rangle = [E_{2x}, E_{2y}, -E_{2z}, -H_{2x}, -H_{2y}, H_{2z}]^T \quad (15)$$

由此, 镜像算符 \hat{M} 的具体形式可以写为:

$$\hat{M} = \text{diag}(1, 1, -1, -1, -1, 1) \hat{K} \quad (16)$$

式中: \hat{K} 为共轭算符。镜像算符用于在入射态空间与反射态空间之间相互转化, 例如:

$$\hat{M}|Down_1\rangle = \hat{M}\hat{M}|U_{p1}\rangle = |U_{p1}\rangle \quad (17)$$

如图 3(b) 所示, 不失一般性, 笔者选取常见的线性偏振模式 $|TE_{down}\rangle, |TM_{down}\rangle$ 作为入射态空间的基矢, 对应的反射态空间基矢为:

$$\begin{cases} |TE_{down}\rangle = \hat{M}|TE_{up}\rangle \\ |TM_{down}\rangle = \hat{M}|TM_{up}\rangle \end{cases} \quad (18)$$

红色箭头表示电场分量, 蓝色箭头表示磁场分量, 黑色箭头则是波矢方向, 入射电磁场基矢与反射电磁场基矢通过 \hat{M} 互相转化。

需要注意的是, 镜像算符 \hat{M} 仅仅是联系入射态空间与反射态空间的诸多方式中的一种, 在其他文献中亦有另外的定义方式。对于相同的入射电磁场而言,

材料的反射电磁场是唯一确定的, 不同的基矢定义方式并不会改变反射场, 只是将场分量以不同基矢展开。

2.2 定义反射本征态

该节将展示在利用镜像算符 \hat{M} 联系两个态空间的前提下, 讨论以线偏振模式 $|TE_{down}\rangle, |TM_{down}\rangle$ 入射, 外尔超材料在外尔频率的反射本征态必然是线性的。

首先, 对反射本征态进行定义。用 \hat{R} 表示界面反射算符, 则入射 $|TE_{down}\rangle$ 得到的反射电磁场可以用 $|TE_{up}\rangle, |TM_{up}\rangle$ 进行展开, 入射场为 $|TM_{down}\rangle$ 同理, 展开方程如下:

$$\begin{cases} \hat{R}|TE_{down}\rangle = a|TE_{up}\rangle + b|TM_{up}\rangle \\ \hat{R}|TM_{down}\rangle = c|TE_{up}\rangle + d|TM_{up}\rangle \end{cases} \quad (19)$$

式中: a, b, c, d 为展开系数。为了求解方程组, 需要先等式两边基矢变换到同一态空间, 应用镜像算符 \hat{M} 进行基矢变换,

$$\begin{cases} \hat{R}\hat{M}|TE_{up}\rangle = a|TE_{up}\rangle + b|TM_{up}\rangle \\ \hat{R}\hat{M}|TM_{up}\rangle = c|TE_{up}\rangle + d|TM_{up}\rangle \end{cases} \quad (20)$$

此时可以写出界面反射算符与镜像算符的矩阵表示为:

$$\hat{R}\hat{M}|r_i\rangle = \sum_j D_{ji}|r_j\rangle \quad (21)$$

式中: $i, j = 1, |r_1\rangle = |TE_{up}\rangle, i, j = 2, |r_2\rangle = |TM_{up}\rangle$, 此时反射系数矩阵为:

$$D(\hat{R}\hat{M}) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad (22)$$

需要注意的是, 反射系数矩阵是 $\hat{R}\hat{M}$ 的矩阵表示, 而不是 \hat{R} 的矩阵表示。

对反射系数矩阵进行对角化, 可以求得两个本征态以及对应的本征值。由于系统能量守恒, 反射系数矩阵为酉矩阵, 两个本征值记为:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_2} \end{pmatrix} \quad (23)$$

以第一个本征态为例, $D|\phi_1\rangle = e^{i\phi_1}|\phi_1\rangle, |\phi_1\rangle$ 为本征矢量。反射系数矩阵的本征矢量 $|\phi_1\rangle$ 为 2×1 的矢量, 含义为对应基矢的系数。将基矢系数与基矢相乘的结果线性叠加, 便可得到反射态空间中电磁场模式的形式为:

$$|EH\rangle = \phi_{1TE_{up}}|TE_{up}\rangle + \phi_{1TM_{up}}|TM_{up}\rangle \quad (24)$$

入射态空间与反射态空间通过镜像算符 \hat{M} 关联, 入射态空间内的电磁场形式为:

$$\widehat{M}|EH\rangle = \widehat{M}(\phi_{1TE_{up}}|TE_{up}\rangle + \phi_{1TM_{up}}|TM_{up}\rangle) = \phi_{1TE_{up}}|TE_{down}\rangle + \phi_{1TM_{up}}|TM_{down}\rangle$$

上述的界面反射过程可以记为:

$$\begin{aligned} \widehat{R}\widehat{M}(\phi_{1TE_{up}}|TE_{up}\rangle + \phi_{1TM_{up}}|TM_{up}\rangle) &= e^{i\phi_1}(\phi_{1TE_{up}}|TE_{up}\rangle + \phi_{1TM_{up}}|TM_{up}\rangle) \\ \widehat{R}(\phi_{1TE_{up}}|TE_{down}\rangle + \phi_{1TM_{up}}|TM_{down}\rangle) &= e^{i\phi_1}(\phi_{1TE_{up}}|TE_{up}\rangle + \phi_{1TM_{up}}|TM_{up}\rangle) \end{aligned}$$

此处反射系数矩阵本征态可以理解为: 当入射电磁场为 $\widehat{M}|EH\rangle$ 时, 反射模式便是 $|EH\rangle$ 并具有额外相位 $e^{i\phi_1}$, 因此, 将反射本征态写为:

$$|EH\rangle = \phi_{1TE_{up}}|TE_{up}\rangle + \phi_{1TM_{up}}|TM_{up}\rangle \quad (25)$$

反射本征态定义在反射态空间内, 其入射态空间的对应本征态为:

$$\phi_{1TE_{up}}|TE_{down}\rangle + \phi_{1TM_{up}}|TM_{down}\rangle \quad (26)$$

2.3 线性本征态的必然性

在这样的定义下, 外尔超材料的两个本征态必然是线性的, 见图 4。当入射基矢取 $|TE_{down}\rangle, |TM_{down}\rangle$ 时, 反射系数矩阵的独特性质会直接导出线性本征态的结果。

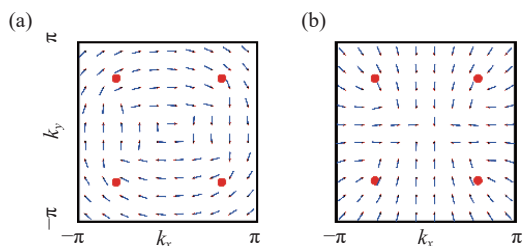


图 4 外尔超材料反射本征态的电磁场为线性偏振模式

Fig.4 Reflection eigen electromagnetic fields of Weyl metamaterial are linear polarized

反射系数矩阵的一般形式为:

$$D(\widehat{RM}) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad (27)$$

在系统没有损耗的前提下, 反射系数矩阵为酉矩阵, 以满足能量守恒的要求。因此, 采用酉矩阵通用形式, 可以将反射系数矩阵记为 $A = U\lambda U^{-1}$, 其中 U 代表矩阵 A 的本征矢量矩阵, λ 代表本征值,

$$A|\phi_1\rangle = \lambda_1|\phi_1\rangle, A|\phi_2\rangle = \lambda_2|\phi_2\rangle \quad (28)$$

$$U = [|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle], \lambda = \text{diag}([\lambda_1, \lambda_2])$$

根据酉矩阵的性质, 有 $U \in U(2), U^{-1} = U^{*T}$,

$$A^T = (U\lambda U^{*T})^T = (U^*)\lambda^T(U^*)^{-1} \quad (29)$$

由于该界面的反射过程满足洛伦兹互易, 反射系数矩阵是对称矩阵, 即 $A^T = A$,

$$(U^*)\lambda^T(U^*)^{-1} = U\lambda U^{-1}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda^T$$

$$U = U^* \quad (30)$$

因此, 本征矢量 U 内元素必须均为实数。由于本征矢量 U 的物理意义为基矢 $|TE_{up}\rangle, |TM_{up}\rangle$ 的系数, 而基矢 $|TE_{up}\rangle, |TM_{up}\rangle$ 为线性偏振模式, 每个分量均为实数, 因此, 本征态必然为线性偏振模式, 图 4(a) 和 (b) 分别对应两个反射本征模式, 红点为外尔点, 箭头表示电磁场, 所有的箭头都是线性的, 没有出现椭圆偏振态与圆偏振态的情况。

3 外尔超材料的线性本征态

在第一布里渊区里, 可以看到本征态的电磁场并不是朝向一致的, 如图 4 所示。由于外尔点 (红色圆点) 是反射相位奇点, 本征电磁场的方向在外尔点附近剧烈变化。在右上角外尔点附近取圆形路径, 环绕外尔点进行扫描, 得到本征电磁场朝向变化如图 5(a) 所示。所有反射本征态均为线性偏振模式, 线段颜色表示本征态的相位 $e^{i\phi}$ 。在每一点都有两个本征态, 两个反射本征态所对应的本征相位不同, 同时这两个本征态电磁场方向互相垂直, 构成十字叉形。随着扫描路径在布里渊区位置的连续改变, 十字叉形的朝向也在连续变化。值得一提的是, 当扫描路径在动量空间绕外尔点一圈时, 本征电磁场方向 (十字叉形) 变化为获得 $\pi/2$ 的额外相位。若电磁场想回到初始状态, 需要本征电磁场方向变化为 2π , 即获得 $4 \times \pi/2$ 的额外相位。这也就意味着, 扫描路径需要绕外尔点 4 圈, 才能使本征电磁场回到初始状态。四阶莫比乌斯环 (quadratic Möbius strip) 这种独特的拓扑结构可以描述绕外尔点一圈的本征场方向变化, 如图 5(b) 所示。当准动量 k 在第一布里渊区绕外尔点一圈时, 本征电磁场则是沿着四阶莫比乌斯环的纸面到达了一个和初始态相互垂直的模式, 并且这个模式依旧是外尔超材料

的反射本征电磁场,这也揭示了外尔超材料的独特拓扑特性。

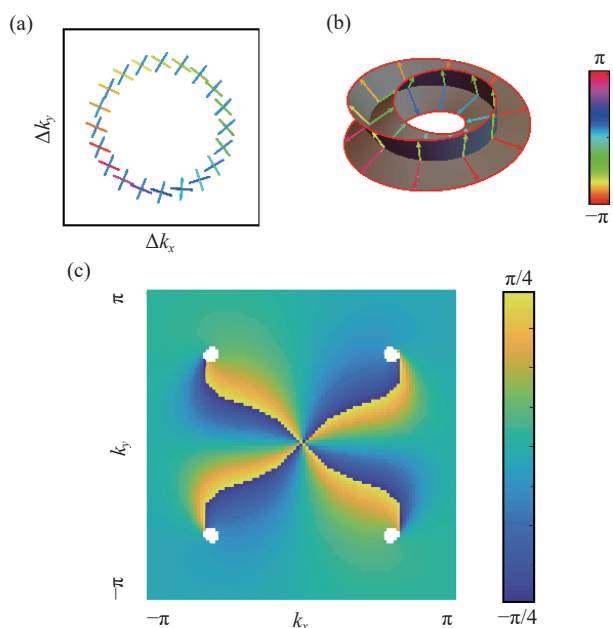


图 5 (a) 路径绕外尔点一圈的线性反射本征态; (b) 四阶莫比乌斯环; (c) 本征态旋转角度 θ

Fig.5 (a) Linear reflection eigenmode when circling one Weyl node; (b) Quadratic Möbius strip; (c) Rotation angle θ of the linear reflection eigenstate

除此之外,基于本征场的线性偏振特性,笔者定义了一个旋转角度 θ 用以描述本征态所构成的十字叉在第一布里渊区不同位置的朝向。根据前文公式,反射系数矩阵 A 的本征矢量 U 内元素必然均为实数,并且满足 $UU^{-1} = I$, 因此可以写出矩阵 U 的通用形式:

$$U = [|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle] = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} \\ \phi_{12} & \phi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ -n & m \end{pmatrix}$$

$$m^2 + n^2 = 1, \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = 0 \quad (31)$$

显然,矩阵 $U \in SO(2)$, 为正交群中的元素。

由于 m, n 均为实数,可以定义:

$$m = \cos \theta, n = \sin \theta$$

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (32)$$

$\theta(k_x, k_y)$ 为动量空间特定点 $[k_x, k_y]$ 的本征电磁场旋转角度,画出旋转角 θ 在动量空间的分布如图 5(c) 所示。 θ 在动量空间的分布形态为黎曼面 (Riemann surface), 每个外尔点作为分支点 (branch point) 会延伸

出割线 (branch cut), 并汇聚在布里渊区原点 $\Gamma(0,0)$ 点, 因此, 旋转角 θ 在布里渊区原点是无法定义的。本征态旋转角度 θ 在动量空间的变化范围为 $[-\pi/4, \pi/4]$, 绕外尔点一圈本征场朝向变化为 $\pi/2$, 这与图 5(a) 的观察结果相符合。通过将反射系数矩阵的本征矢量简化成上述形式, 可以快速判断线偏振模式的角度变化。

4 结 论

综上, 针对界面全反射的情况, 笔者定义了将入射态空间与反射态空间之间联系起来的镜像算符 \widehat{M} , 并利用界面反射算符结合镜像算符 $\widehat{R}\widehat{M}$ 定义了全反射界面的本征态。在选取入射基矢为线性偏振时, 这种独特的定义模式会得出全反射界面的反射本征态均为线性偏振模式的结果, 并且线性偏振本征态是受系统能量守恒与洛伦兹互易性保护的。以外尔超材料为例, 即使外尔超材料与空气界面的界面反射具有偏振转换特性, 在这种独特的定义方式下, 可求得界面反射的本征电磁场均为线性偏振模式。从两个线性偏振本征态互相垂直, 引申出一种根据反射系数矩阵本征矢量来定义的旋转角度 θ , 用于表征本征模式旋转角度的变化量。除此之外, 笔者发现在动量空间取路径环绕外尔点一圈, 本征电磁场获得变化角度为 $\pi/2$ 的额外相位, 这种角度变化规律可以用四阶莫比乌斯环来描述。

参考文献:

- [1] Lv B Q, Qian T, Ding H. Experimental perspective on three-dimensional topological semimetals [J]. *Reviews of Modern Physics*, 2021, 93(2): 025002.
- [2] Armitage N P, Mele E J, Vishwanath A. Weyl and dirac semimetals in three-dimensional solids [J]. *Reviews of Modern Physics*, 2018, 90(1): 015001.
- [3] Yan B, Felser C. Topological materials: Weyl semimetals [J]. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 2016, 8: 337-354.
- [4] Volovik G E, Zhang K. Lifshitz transitions, type-ii dirac and weyl fermions, event horizon and all that [J]. *Journal of Low Temperature Physics*, 2017, 189(5): 276-299.
- [5] Jia S, Xu S Y, Hasan M Z. Weyl semimetals, Fermi arcs and chiral anomalies [J]. *Nature Materials*, 2016, 15(11): 1140-1144.

- [6] Huang S M, Xu S Y, Belopolski I, et al. New type of Weyl semimetal with quadratic double Weyl fermions [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2016, 113(5): 1180-1185.
- [7] Roy S, Kolodrubetz M, Moore J E, et al. Chern numbers and chiral anomalies in Weyl butterflies [J]. *Physical Review B*, 2016, 94(16): 161107.
- [8] Behrends J, Roy S, Kolodrubetz M, et al. Landau levels, Bardeen polynomials and fermi arcs in Weyl semimetals: the who's who of the chiral anomaly [EB/OL]. (2018-07-17)[2023-04-19]. <https://arxiv.org/abs/1807.06615>.
- [9] Jia H, Zhang R, Gao W, et al. Observation of chiral zero mode in inhomogeneous three-dimensional Weyl metamaterials [J]. *Science*, 2019, 363(6423): 148-151.
- [10] Rechiński R, Tworzydło J. Landau levels of double-Weyl nodes in a simple lattice model [J]. *Acta Physica Polonica A*, 2016, 130(5): 1179-1182.
- [11] Xia L, Gao W, Yang B, et al. Stretchable photonic 'fermi arcs' in twisted magnetized plasma [J]. *Laser & Photonics Reviews*, 2018, 12(1): 1700226.
- [12] Biao Y, Qinghua G, Tremain B, et al. Ideal weyl points and helicoid surface states in artificial photonic crystal structures [J]. *Science*, 2018, 359(6379): 1013-6.
- [13] Fang C, Lu L, Liu J, et al. Topological semimetals with helicoid surface states [J]. *Nature Physics*, 2016, 12(10): 936-41.
- [14] Ozawa T, Price H M, Amo A, et al. Topological photonics [J]. *Reviews of Modern Physics*, 2019, 91(1): 015006.
- [15] Zhao Y, Askarpour A N, Sun L, et al. Chirality detection of enantiomers using twisted optical metamaterials [J]. *Nature Communications*, 2017, 8(1): 14180.
- [16] Yang B, Guo Q, Tremain B, et al. Direct observation of topological surface-state arcs in photonic metamaterials [J]. *Nature Communications*, 2017, 8(1): 97.
- [17] Yang B, Lawrence M, Gao W, et al. One-way helical electromagnetic wave propagation supported by magnetized plasma [J]. *Scientific Reports*, 2016, 6(1): 21461.
- [18] Cheng H, Gao W, Bi Y, et al. Vortical reflection and spiraling Fermi arcs with Weyl metamaterials [J]. *Physical Review Letters*, 2020, 125(9): 093904.

Polarization characteristics of Weyl metamaterial based on interfacial reflection eigenmodes

Wang Hanyu^{1,2}, Xu Wei^{1,2}, Zhu Zhihong^{1,2}, Yang Biao^{1,2*}

(1. College of Advanced Interdisciplinary Studies & Hunan Provincial Key Laboratory of Novel NanoOptoelectronic Information Materials and Devices, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Nanhu Laser Laboratory, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract:

Objective As a massless relativistic fermion, Weyl fermions play a crucial role in quantum theory and the standard model. To mimic the physical properties of Weyl fermions, constructing Weyl points in momentum space needs breaking the inversion or time-reversal symmetry, and those Weyl points are topologically protected. Weyl points possess unique characteristics, including positive and negative chiralities corresponding to the sources and sinks of the Berry curvature, respectively. Consequently, Weyl points are regarded as magnetic monopoles in momentum space. Weyl points have also attracted significant attention due to their scattering and transport properties. For example, Weyl semimetal exhibits chiral zero modes and corresponding chiral magnetic effects in condensed matter physics. It is worth mentioning that Weyl points are widely acknowledged as singularities in the reflection phase, but there has been relatively little study on the reflection eigenmodes of the interface between a Weyl metamaterial and air.

Methods This article utilizes the ideal Weyl metamaterial as a research platform, which offers a relatively large frequency range for exploring the fundamental properties of Weyl points. By applying the effective media theory,

the constitutive relation of saddle-shaped metallic structures (Fig.1) can be described concisely. Additionally, the band structure of Weyl metamaterial can be calculated using simulation software.

Results and Discussions For a totally reflected interface, the wave vectors of the incident and reflected state space are different. Before solving for the reflection eigenmodes, it is necessary to define the basis separately for the two different state spaces of the incident and reflected electromagnetic fields. Since the electric field is a polar vector and the magnetic field is an axial vector, the mirror operation introduces different responses in the directions perpendicular and parallel to the interface. By applying the mirror operation, we can connect the incident and reflected state spaces, allowing us to solve for the eigenmodes using conventional methods and determine their matrix representation. Given this definition, energy conservation ensures that the reflection coefficient matrix must be unitary, while Lorentz reciprocity guarantees that the reflection coefficient matrix must be symmetric. Such a unique reflection coefficient matrix must have real eigenstates, resulting in both reflection eigenmodes being linearly polarized. Using this method to analyze the reflection eigenmodes of Weyl metamaterials, it is found that all reflection eigenstates are linearly polarized. The two eigen electromagnetic fields are perpendicular to each other, forming a cross shape. As the scanning path changes continuously in the Brillouin zone, the orientation of the cross shape also varies. When the scanning path surrounds the Weyl points in momentum space, the eigen field (cross shape) undergoes an additional phase shift of $\pi/2$. A quadratic Möbius strip can describe this feature.

Conclusions In the case of total reflection at an interface, the incident state space and the reflected state space are bridged via a mirror operator. Combining the interface reflection operator with the mirror operator allow us to define the eigenstates of the total reflection interface. When the incident basis is chosen as linear polarized, this unique definition results in the reflection eigenstates of the total reflection interface being linear polarization modes protected by energy conservation and Lorentz reciprocity. Taking the Weyl metamaterial as an example, even if the interface reflection between the Weyl metamaterial and air exhibits polarization conversion characteristics, given this unique definition, the eigenmodes of the interface reflection can be obtained as linear polarized. Since the two linear polarization eigenstates are perpendicular to each other, a rotation angle could be defined to characterize the change in the rotation angle of the eigenmode. In addition, when scanning a loop path around the Weyl points in momentum space, the eigen field acquires an additional phase shift of $\pi/2$, which can be described using a quadratic Möbius strip.

Key words: metamaterial; Weyl points; eigenstate; linear polarization; Möbius strip

Funding projects: National Natural Science Foundation of China (62105240; 62075159)